

Continuité des fonctions de plusieurs variables

1 De quoi parle-t-on ?

1.1 Des fonctions entre espaces vectoriels normés

On peut s'intéresser à des fonctions :

$$\begin{array}{ccc} f : A \subset E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

et se poser la question de la continuité de f .

Exemple. $f : M \mapsto \frac{1}{\text{tr}(M^\top M)}$ est une fonction $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

Exemple. $u : f \mapsto \int_0^1 \cos(f(t)) dt$ est une fonction $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition. Soit $f : E \rightarrow F$ définie sur A .

- Soit $a \in \overline{A}$ et $b \in F$. On dit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A \quad \|x - a\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon$$

- Soit $a \in A$. On dit que f est **continue en a** lorsque :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$$

- f est **continue sur A** lorsqu'elle est continue en tout point de A .
- Soit $a \in \overline{A} \setminus A$ un point adhérent de A où f n'est pas définie. On dit que f se prolonge par continuité en a si f admet une limite b en a . La fonction prolongée est :

$$f : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ b & \text{si } x = a \end{cases}$$

Elle est continue en a .

Remarque. La continuité peut être établie « par opérations algébriques » sur des fonctions que l'on sait continues.

1.2 Des fonctions entre espaces vectoriels normés automatiquement continues

Proposition.

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et E de dimension finie, alors f est continue.
- En particulier, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , les applications $\pi_i : x \mapsto x_i$, où $(x_1, \dots, x_n)$ est le n -uplet des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, sont continues.
- Si f est multilinéaire sur un produit d'espaces normés de dimension finie, alors f est continue.
- Si f est polynomiale sur un espace normé de dimension finie, alors f est continue.

1.3 Des fonctions de plusieurs variables

Remarque. Fréquemment, on étudie des fonctions :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

La continuité de f est équivalente à la continuité de $f_1, \dots, f_p$. On peut donc se contenter d'étudier les fonctions numériques de plusieurs variables.

Remarque. La compréhension de la continuité pour les fonctions de deux variables est indispensable pour l'étude des fonctions de n variables.

Proposition. Les applications :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x \quad \quad (x, y) \mapsto y \end{aligned}$$

sont continues.

Exemple. Étudier la continuité de :

$$(x, y) \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) \ln(x^2 + y^2)$$

sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

2 Techniques d'étude de la continuité des fonctions de deux variables

2.1 Montrer la continuité « par opérations », sauf éventuellement en un point

Exemple. Montrer que la fonction :

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{(\sin(x^2 + y^2))^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

2.2 Montrer la non continuité en un point particulier

Exemple. Étudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction :

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Exemple. Étudier la continuité en $(0, 0)$ de la fonction :

$$g : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Exemple. Étudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction :

$$h : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2.3 Montrer la continuité en un point particulier, prolonger une fonction par continuité

Exemple. Étudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction :

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Exemple. Prolonger par continuité en $(0, 0)$ la fonction :

$$g : (x, y) \mapsto xy \ln(x^2 + y^2)$$

Exemple. Montrer que la fonction :

$$h : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{(\sin(x^2 + y^2))^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est continue en $(0, 0)$.

Exemple. Montrer que la fonction :

$$k : (x, y) \mapsto \frac{x^5}{\operatorname{Arctan}(x^4 + y^4)}$$

se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

3 Continuité sous le signe $\int$

Théorème.

Soit $h : X \times I \rightarrow \mathbb{K}$, où $X \subset E$ est une partie d'un espace normé de dimension finie.
Si :

- Pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x, t)$ est **continue** sur X ;
- Pour tout $x \in X$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que :

$$|h(x, t)| \leq \varphi(t) \quad \forall (x, t) \in X \times I$$

où $\varphi(t)$ est intégrable sur I , indépendante de x .

Alors :

- $f : x \mapsto \int_I h(x, t) dt$ est définie et continue sur X .

Remarque. *Il s'agit d'une simple adaptation du théorème connu pour la variable réelle au cas d'une variable dans un espace vectoriel normé de dimension finie.*

Adaptation pour domination locale. Soit $h : X \times I \rightarrow \mathbb{K}$, où $X \subset E$ est une partie d'un espace normé de dimension finie. Soit $a \in X$.

Si :

- Pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x, t)$ est **continue** sur X ;
- Pour tout $x \in X$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination locale** : il existe V voisinage relatif de a dans X , et φ telle que :

$$|h(x, t)| \leq \varphi(t) \quad \forall (x, t) \in V \times I$$

où $\varphi(t)$ est intégrable sur I , indépendante de x .

Alors :

- $f : x \mapsto \int_I h(x, t) dt$ est définie sur V et continue en a .

4 Suites et séries de fonctions

Rappel des théorèmes.

Les fonctions considérées sont $A \subset E \rightarrow F$ où E et F sont des espaces normés de dimension finie.

- Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A ou sur tout compact de A (resp. au voisinage de a) et si les f_n sont continues sur A (resp. en a), alors f est continue sur A (resp. en a).
- Si $\sum f_n$ converge uniformément sur A ou sur tout compact de A (resp. au voisinage de a) et si les f_n sont continues sur A (resp. en a), alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A (resp. en a).

Exemple. Montrer que :

$$(x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x + iy)^n}{(2n)!}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.