

## Séries à termes dans un evn de dimension finie

On reprend essentiellement dans ce chapitre la théorie des séries numériques, et on l'adapte aux evn. Dans tout le chapitre,  $E$  désigne un espace vectoriel muni d'une norme  $\|\cdot\|$ .

### 1 Séries à termes dans un espace vectoriel normé de dimension finie

#### 1.1 Somme partielle, convergence, divergence, somme, reste d'une série convergente

**Définition.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ . On s'intéresse à la **série**  $\sum u_n$ .

- $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  est la **somme partielle** d'ordre  $n$ .
- La série  $\sum u_n$  **converge** lorsque la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans l'espace vectoriel normé  $E$ , c'est-à-dire s'il existe  $S \in E$  tel que :

$$\left\| \sum_{k=0}^n u_k - S \right\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On dit qu'elle **diverge** sinon.

- En cas de convergence, on appelle **somme de la série**, et on note  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ , la limite de la suite des sommes partielles.

**Remarque.** Étudier une série, c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge.

**Définition.** Lorsque la série  $\sum u_n$  converge, on peut définir son **reste** d'ordre  $n$ , avec les notations précédentes :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

**Proposition.** La suite des restes est bien définie lorsque  $\sum u_n$  converge, et  $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

## 1.2 Divergence grossière

---

**Proposition.** Si la série  $\sum u_n$  converge, alors la suite  $(u_n)_n$  converge vers 0

**Remarque.** Il s'agit d'une condition nécessaire.

**Définition.** Lorsque  $(u_n)_n$  ne converge pas vers 0, on dit que la série  $\sum u_n$  **diverge grossièrement**.

Preuve On suppose  $\sum u_n$  converge

$$\text{donc } \exists S \text{ tq } \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$$

$\parallel$   
 $S_n$

$$\text{Et } S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$$

Donc par op sur les limites

$$\begin{array}{ccc} S_n - S_{n-1} & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & S - S = 0 \\ \parallel & & \\ u_n & & \end{array}$$

### 1.3 Opérations

**Proposition.** Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries convergentes,  $\lambda$  et  $\mu$  deux scalaires. Alors la série  $\sum (\lambda \overrightarrow{u_n} + \mu \overrightarrow{v_n})$  converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

**Corollaire.** L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel, et l'application  $\sum u_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  y est linéaire.

**Lien suite-série.** Soit  $(u_n)_n$  une suite à valeurs dans  $E$ . On a :

la suite  $(u_n)_n$  converge  $\iff$  la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\ &= u_n - u_0 + \sum_{k=1}^{n-1} 0. \end{aligned}$$

*per télescopage*

**Proposition.** La convergence et la valeur de la somme d'une série convergente est indépendante du choix de la norme sur  $E$  qui est de dimension finie.

Preuve: Soit  $\|\cdot\|$  et  $N$  deux normes sur  $E$ .

$$\text{ie } \exists \alpha, \beta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in E \quad \alpha N(x) \leq \|x\| \leq \beta N(x)$$

• Si  $\sum u_n$  converge, de somme  $S$  pour  $\|\cdot\|$

$$\text{Alors: } \forall n \quad N\left(\sum_{k=0}^n u_k - S\right) \leq \frac{1}{\alpha} \left\| \sum_{k=0}^n u_k - S \right\|$$
$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc  $\sum u_n$  converge, de somme  $S$ , pour  $N$ .

• ...

## 1.4 Caractérisation par les coordonnées dans une base

**Définition.** Soit  $\sum \vec{u}_n$  une série à termes dans  $E$ , et  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$  une base de  $E$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut écrire :

$$\vec{u}_n = u_n^{(1)} \vec{e}_1 + \dots + u_n^{(p)} \vec{e}_p = \sum_{i=1}^p u_n^{(i)} \vec{e}_i \quad E \ni u_n = (u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(p)}) \in \mathbb{K}^p$$

$\uparrow$  donnée

l'unique écriture de  $u_n$  comme C.L. de  $\mathcal{B}$

La suite  $(u_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$  s'appelle la  $i$ -ème suite coordonnée de  $(u_n)_n$ .

**Proposition.** Avec les notations précédentes,

$$\sum \vec{u}_n \text{ converge} \iff \forall i \in \{1, \dots, p\}, \sum u_n^{(i)} \text{ converge}$$

$\swarrow$  série numérique

et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(1)} \right) e_1 + \dots + \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)} \right) e_p = \sum_{i=1}^p \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(i)} \right) e_i$$

**Remarque.** La convergence de  $\sum u_n$  est caractérisée par la convergence de ses séries coordonnées dans une base  $\mathcal{B}$  fixée.

$\sum x_n$  série numérique

$\sum x_n$  cv absolument

signifie que  $\sum |x_n|$  cv  
i.e. la "taille" de  $x_n$  est pas trop grande

$(x_n)_n$  sommable

signifie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty$   
↑  
taille de  $x_n$

## 1.5 Convergence absolue



**Définition.** Soit  $\sum \vec{u}_n$  une série à termes dans  $E$ . On dit que  $\sum \vec{u}_n$  **converge absolument** si et seulement si la série numérique  $\sum \|\vec{u}_n\|$  converge.

**Remarque.** Lorsque  $E = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , la norme la valeur absolue ou le module, et on retrouve bien la convergence absolue des séries numériques.

**Remarque.** On ne confondra pas la convergence absolue de  $\sum u_n$  dans  $(E, \|\cdot\|)$  evn de dimension finie, avec la convergence normale de  $\sum f_n$  dans l'espace  $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$  des fonctions bornées, qui est la convergence de la série numérique  $\sum \|f_n\|_\infty$ .

**Théorème.**

Dans  $E$  espace vectoriel normé de dimension finie, si  $\sum u_n$  converge absolument, alors  $\sum u_n$  converge.

*Preuve.* Une justification est proposée en annexe.

□

Soit  $A$  une algèbre de dimension finie admettant  $e$  pour élément unité et munie d'une norme notée  $\|\cdot\|$ .

On suppose que :  $\forall (u, v) \in A^2, \|u.v\| \leq \|u\|.\|v\|$ .

1. Soit  $u$  un élément de  $A$  tel que  $\|u\| < 1$ .

(a) Démontrer que la série  $\sum u^n$  est convergente.

(b) Démontrer que  $(e - u)$  est inversible et que  $(e - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ .

2. Démontrer que, pour tout  $u \in A$ , la série  $\sum \frac{u^n}{n!}$  converge.

1(a).  $\|u^n\| \leq \|u\|^n$  par récurrence

et  $\sum \|u\|^n$  est une série numérique géométrique

convergente, car sa raison est  $\|u\| < 1$

Donc  $\sum u^n$  converge absolument, donc converge.

(b) Calculer :

$$\begin{aligned} (e - u) \sum_{k=0}^n u^k &= \sum_{k=0}^n u^k - \sum_{k=0}^n u^{k+1} \\ &= e - u^{n+1} \quad \text{par télescopage} \end{aligned}$$

Limite pour  $n \rightarrow +\infty$ .

$$* \quad \|u^{n+1}\| \leq \overset{\text{réc}}{\|u\|^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

\*  $(u, v) \mapsto uv$  est bilinéaire sur  $A$  de dim finie

donc continue donc

$$(e - u) \sum_{k=0}^n u^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (e - u) \sum_{k=0}^{+\infty} u^k$$

Donc à la limite

$$(e-u) \sum_{k=0}^{+\infty} u^k = e$$

et de même

$$\left( \sum_{k=0}^{+\infty} u^k \right) (e-u) = e$$

Donc  $(e-u)$  inversible, d'inverse  $\sum_{k=0}^{+\infty} u^k$ .

## 2 Application : séries de matrices, séries d'endomorphismes

### 2.1 Exponentielle de matrice, d'endomorphisme en dimension finie

#### Définition.

- Pour  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ , on définit :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

- Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, on définit :

$$\exp(u) = e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} u^n$$

Preuve:  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  est de dim finie, donc tous les  
normes sont équivalentes. On choisit  $\|\cdot\|_2$   
où  $\|A\|_2 = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$ .

On sait que  $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$   
"sub-multiplicative"

Pour tout  $n$ :

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n \quad \text{par récurrence}$$

$$\text{donc } \left\| \frac{1}{n!} A^n \right\| \leq \frac{1}{n!} \|A\|^n$$

↑  
t.g. d'une série numérique  
exponentielle, convergente

Donc  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} A^n$  converge absolument,  
donc converge.

Donc  $\exp(A)$  existe.

## 2.2 Exemples

**Proposition.** Si  $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_p \end{pmatrix}$  est diagonale, alors  $\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{a_p} \end{pmatrix}$ .

**Proposition.** Si  $T = \begin{pmatrix} a_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_p \end{pmatrix}$  est triangulaire supérieure, alors  $\exp(T)$  est de la forme :

$$\exp(T) = \begin{pmatrix} e^{a_1} & \star & \cdots & \star \\ 0 & e^{a_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & e^{a_p} \end{pmatrix}$$

**Proposition.** Si  $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  est nilpotente, alors  $\exp(N) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} N^k$ .

Preuve: Par réc,  $\forall k$   $D^k = \begin{pmatrix} a_1^k & (0) \\ (0) & \ddots & a_p^k \end{pmatrix}$

donc  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} a_1^k & (0) \\ (0) & \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} a_p^k \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} e^{a_1} & (0) \\ (0) & e^{a_p} \end{pmatrix}$

par convergence par coefficients

Donc  $\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{a_1} & (0) \\ (0) & e^{a_p} \end{pmatrix}$

### 2.3 Propriétés

**Proposition.** Soit  $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  deux matrices semblables, et  $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  telle que  $A = PBP^{-1}$ . Alors :

$$\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}$$

preuve: à connaître

Rappel:  $\varphi: \mathcal{M}_p(\mathbb{K})^2 \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  est bilinéaire

$$(M, N) \mapsto MN$$

$$\text{c'est } \begin{cases} \varphi(\alpha M + \alpha' M', N) = \alpha \varphi(M, N) + \alpha' \varphi(M', N) \\ \varphi(M, \alpha N + \alpha' N') = \dots \end{cases}$$

$$\text{c'est } \begin{cases} (\alpha M + \alpha' M') N = \alpha MN + \alpha' M' N \\ \dots \end{cases}$$

$$\text{et donc } \left( \sum_{k=0}^n \alpha_k M_k \right) N = \sum_{k=0}^n (\alpha_k M_k N)$$

$\uparrow$  somme finie

$$A = P B P^{-1}$$

$$\text{donc par récurrence } A^k = P B^k P^{-1}$$

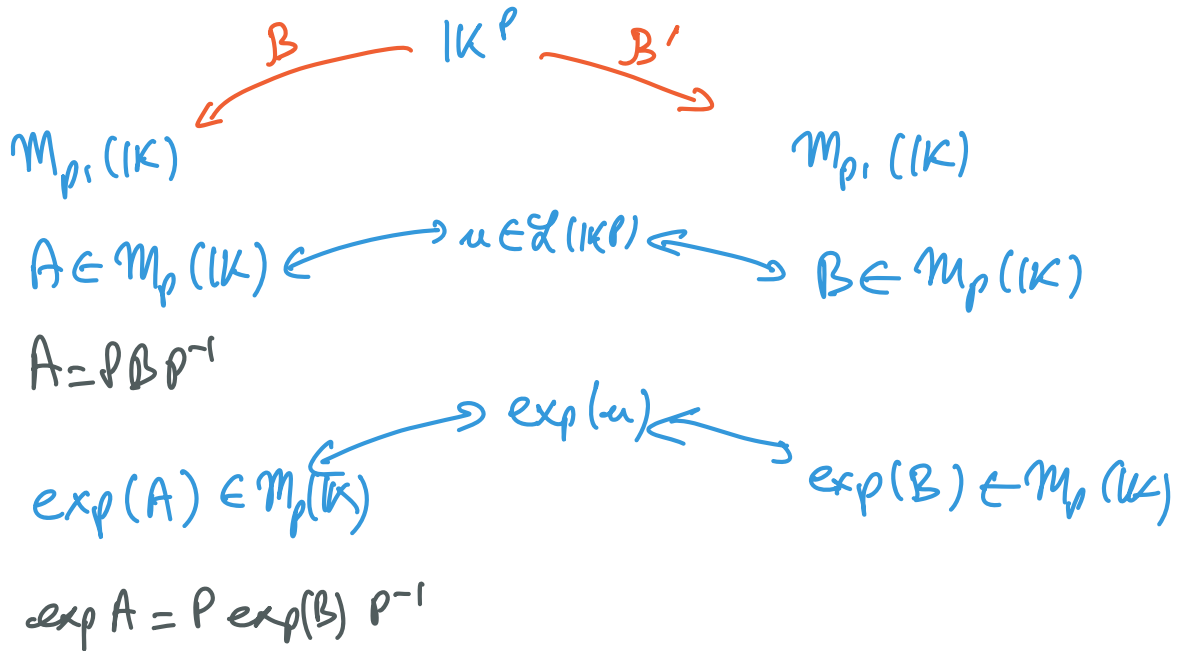
$$\begin{aligned} \text{donc } \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k}_{\text{}} &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P B^k P^{-1} \\ &= P \left( \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} B^k}_{\text{}} \right) P^{-1} \end{aligned}$$

À la limite, pour  $n \rightarrow +\infty$ , par continuité de  
 $M \mapsto P M P^{-1}$  linéaire sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

$$\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}$$

Remarque

$$P = \text{Pam}(B \rightarrow B')$$



Corollaire. Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ . Alors  $\text{Sp}(\exp(A)) = \{e^\lambda, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ .

$A$  est triangulisable :  $\exists P \in \text{GL}_p(\mathbb{C})$

$$\text{t.q. } A = P T P^{-1}$$

$$\text{où } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ (0) & \lambda_p \end{pmatrix}$$

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} = \text{Sp}(A)$$

Par ce qui précède :

$$\exp(A) = P \exp(T) P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * \\ (0) & e^{\lambda_p} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\exp(A)) &= \text{Sp}(\exp(T)) \\ &= \{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p}\} \end{aligned}$$

## 4 Suites et séries de fonctions

### Rappel des théorèmes.

Les fonctions considérées sont  $A \subset E \rightarrow F$  où  $E$  et  $F$  sont des espaces normés de dimension finie.

- Si  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $A$  ou sur tout compact de  $A$  (resp. au voisinage de  $a$ ) et si les  $f_n$  sont continues sur  $A$  (resp. en  $a$ ), alors  $f$  est continue sur  $A$  (resp. en  $a$ ).
- Si  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$  ou sur tout compact de  $A$  (resp. au voisinage de  $a$ ) et si les  $f_n$  sont continues sur  $A$  (resp. en  $a$ ), alors  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est continue sur  $A$  (resp. en  $a$ ).

**Proposition.**

- L'application  $\exp \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  est continue.
- Pour  $E$  evn de dimension finie,  $\exp \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  est continue.

**Proposition.** Soit  $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ , telles que  $AB = BA$ .

- $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A)$
- $\exp(A)$  est inversible et  $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$ .

**Proposition.** Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un evn de dimension finie, tels que  $u \circ v = v \circ u$ .

- $\exp(u + v) = \exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u)$
- $\exp(u)$  est inversible et  $\exp(u)^{-1} = \exp(-u)$ .

**Remarque.** En pratique, pour calculer  $\exp(A)$  lorsque  $A$  est quelconque, on décompose  $A$  sous la forme  $A = D + N$  où  $D$  est diagonalisable,  $N$  nilpotente et  $ND = DN$ . Ce résultat n'étant pas au programme, on se laisse guider par l'énoncé.

(on fera la preuve au prochain chapitre)

preuve: Montrer que  $\exp(A)$  est inversible.

$A$  et  $-A$  commutent donc

$$\exp(A + (-A)) = \exp(A) \exp(-A) = \exp(-A) \exp(A)$$

$\parallel$

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\parallel$

$$\begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^0 \end{pmatrix}$$

car diagonal

$\parallel$

$$\mathbb{I}_p$$

Donc  $\exp(A)$  inversible et  $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$ .









