Pour les 7h, à rédiger : 460.9, 320.24, 460.20*

Dérivation, intégration des fonctions vectorielles de variable réelle

Tous les espaces vectoriels normés envisagés dans ce chapitre sont de dimension finie.
On s'intéresse dans ce chapitre à des fonctions :

$$f : \begin{array}{ccc} I \overset{\in \mathbb{R}}{} & \to & F \\ t & \mapsto & \overrightarrow{f(t)} \end{array}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et F un espace normé de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarque. *Pour les fonctions à valeurs vectorielles, il n'y a pas de théorème de Rolle, pas de quotient etc.*

Remarque. *Dans le cadre de notre programme, on ne dérive que les fonctions de variable réelle, et pas les fonctions de variable complexe.*

1 Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

1.1 Dérivabilité et dérivée des fonctions à valeurs vectorielles

Définition. Soit $a \in I$. On dit que f **est dérivable en** a lorsque la fonction :

$$h \mapsto \frac{1}{h}\big(f(a+h) - f(a)\big)$$

admet une limite en 0. On note alors $f'(a)$ cette limite.

Remarque. *$f'(a)$ est un élément de F, un vecteur.*

Proposition. f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\ell \in F$ tel que, au voisinage de $h \to 0$:

$$f(a+h) = f(a) + h\ell + \mathrm{o}(h)$$

$$\overrightarrow{f(a+h)} = \overrightarrow{f(a)} + h\,\vec{\ell} + \overrightarrow{o(h)}$$

où $\overrightarrow{o(h)} = h.\overrightarrow{\varepsilon(h)}$ où $\overrightarrow{\varepsilon(h)} \xrightarrow[h\to 0]{} \vec{0}$

ie $\|\overrightarrow{\varepsilon(h)}\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

$\dfrac{\overrightarrow{f(a+h)} - \overrightarrow{f(a)}}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \ell$ signifie $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell + o(1)$

$$= \frac{1}{h}.\big(f(a+h) - f(a)\big)$$

Définition. f est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, on définit la **fonction dérivée** :

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \to & F \\ t & \mapsto & f'(t) \end{array}$$

On dit que f est $\mathcal{C}^1$ lorsque f est dérivable, et que f' est continue.

Remarque. *On peut définir, lorsqu'elles existent, les dérivées à gauche et à droite en* a.

1.2 Interprétation cinématique

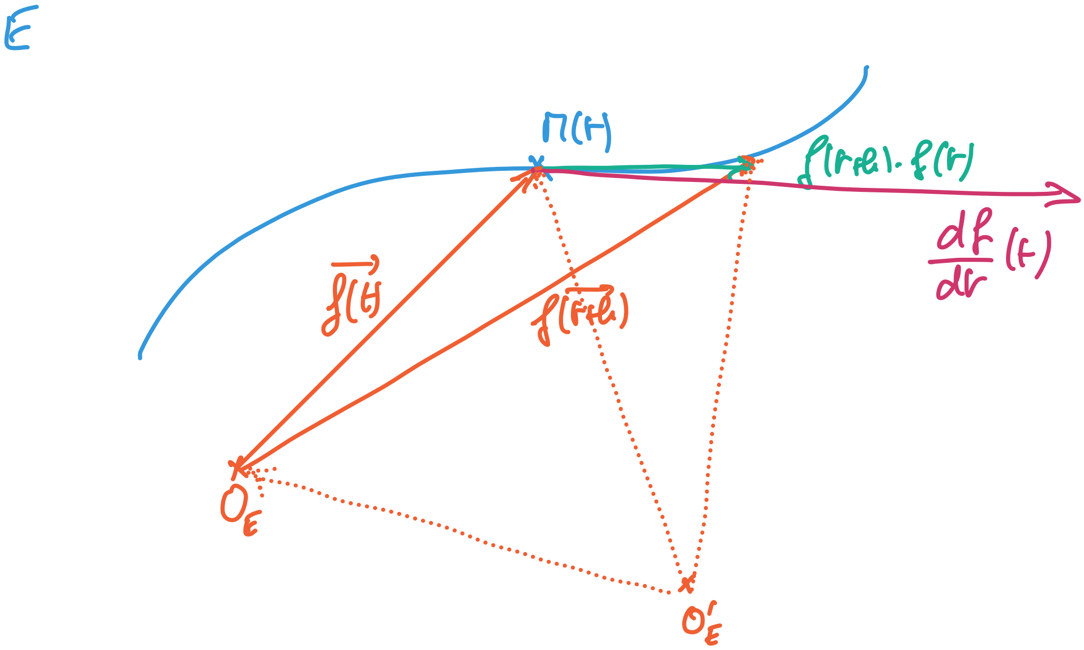
En cinématique, on étudie le mouvement d'un point mobile :

$$t \mapsto M(t)$$

où la variable t désigne le temps. Fixant une origine à l'espace affine, cela revient à étudier la fonction à valeurs vectorielles :

$$f \,:\, t \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$$

On écrit alors, en général, $M'(t)$ pour $f'(t)$ ou encore $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t}$, quantité qui ne dépend pas du choix de l'origine de l'espace affine, et qui représente le **vecteur vitesse** à l'instant t.



1.3 Opérations sur les dérivées

1.3.1 Combinaison linéaire

Proposition. Soit f, g deux fonctions $I \subset \mathbb{R} \to F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si f et g sont dérivables en $a \in E$, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et :

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$$

Proposition. Soit f, g deux fonctions $I \subset \mathbb{R} \to F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $\lambda f + \mu g$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.

$x \longmapsto ax$

1.3.2 Image par une application linéaire

Proposition. Soit ~~G~~ F un espace normé de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(F, G)$, et $f : I \subset \mathbb{R} \to F$ une fonction dérivable en $a \in I$.
Alors $u \circ f : t \mapsto u(f(t))$ est dérivable en a et :

$$(u \circ f)'(a) = u\big(f'(a)\big)$$

Remarque. *Ici, f n'est pas une fonction de la variable réelle, donc on n'applique pas la formule usuelle. Ça n'a pas de sens de parler de la « dérivée de u ».*

$$\begin{tikzcd} I \subset \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "u\circ f"'] & F \arrow[r, "u"] & G \end{tikzcd}$$

Si f dérivable, $u\circ f$ dérivable et

$$(u\circ f)'(t) = u\circ f'(t)$$

Preuve : Au voisinage de $h \to 0$

$$(u\circ f)(t+h) = u\left[f(t+h)\right]$$

$$= u\left[f(t) + h\, f'(t) + h\,\varepsilon(h)\right]$$

où $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0_F$

car f dérivable en t.

$$= \underbrace{u\circ f(t)} + h\, \underbrace{u\circ f'(t)} + \underbrace{h\, u(\varepsilon(h))}_{o(h)\ ?}$$

par linéarité de u.

où $u(\varepsilon(h)) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ car u continue (linéaire en dim finie)

On a un DL_1 de $u\circ f$ donc $u\circ f$ dérivable en t

et $(u\circ f)'(t) = u\circ f'(t)$

Proposition. Avec les notations précédentes, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $u \circ f$ l'est aussi.

Exemple. Soit $A : \begin{array}{ccc} I \subset \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \mapsto & A(t) \end{array}$ une application dérivable sur I. Montrer que $t \mapsto \operatorname{tr}\big(A(t)\big)$ est dérivable sur I, et exprimer sa dérivée à l'aide de A'.

$$A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$t \longmapsto A(t) \longrightarrow \operatorname{tr}(A(t))$$

Comme tr est linéaire, tr o A est dérivable et

$$(\operatorname{tr} \circ A)'(t) = \operatorname{tr}(A'(t))$$

Rmq : $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j}$

$$\operatorname{tr}(A(t)) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)$$

sa dérivée est $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_{ii}'(t) = \operatorname{tr}(A'(t))$

Exemple. Soit $x : \begin{array}{ccc} I \subset \mathbb{R} & \to & E \\ t & \mapsto & x(t) \end{array}$ une application dérivable sur I. Pour $a \in E$, montrer que l'application $t \mapsto \langle a, x(t) \rangle$ est dérivable sur I est exprimer sa dérivée à l'aide de x'.

$$x : I \longrightarrow E \qquad u : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto x(t) \qquad y \longmapsto \langle a, y \rangle$$

u est linéaire et x dérivable donc u o x est dérivable

et $(u \circ x)'(t) = u \circ x'(t) \quad \forall t$

ie $$\frac{d}{dt} \langle a, x(t) \rangle = \langle a, \frac{d}{dt} x(t) \rangle$$

1.3.3 Bilinéarité, dérivée d'un produit

Proposition. Soit E, F, G trois espace normés de dimensions finies, I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $B : E \times F \to G$ est bilinéaire, $f : I \to E$ et $g : I \to F$ sont dérivables en a, alors :

$$B(f,g) : \begin{array}{ccc} I & \to & G \\ t & \mapsto & B\big(f(t), g(t)\big) \end{array}$$

est dérivable en a et :

$$\big(B(f,g)\big)'(a) = B\big(f'(a), g(a)\big) + B\big(f(a), g'(a)\big)$$

Proposition. Avec les mêmes notations, si f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $B(f,g)$ l'est aussi.

Preuve: pour $h \to 0$

$$B(f,g)(t+h) = B\big(f(t+h), g(t+h)\big)$$

$$= B\big(f(t) + h f'(t) + h\,\varepsilon_1(h),\ g(t) + h g'(t) + h\,\varepsilon_2(h)\big)$$

où $\varepsilon_1(h) \to 0$ $\varepsilon_2(h) \to 0$

par bilinéarité

$$= B(f(t), g(t))$$
$$+ h\big[B(f(t), g'(t)) + B(f'(t), g(t))\big]$$
$$\underbrace{\begin{aligned}&+ h^2 B(f'(t), g'(t)) + h B(\varepsilon_1(h), g(t)) + h B(f(t), \varepsilon_2(h)) \\ &+ h^2 B(\varepsilon_1(h), g'(t)) + h^2 B(f'(t), \varepsilon_2(h)) \\ &+ h^2 B(\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h))\end{aligned}}_{o(h)\ ?}$$

Mq $B(\varepsilon_1(h), g(t)) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

B bilinéaire sur un ev de dim finie, donc continue

donc $\exists C > 0$ tq $\forall x, y$ $\|B(x,y)\| \leq C \|x\| \|y\|$

donc $\|B(\varepsilon_1(h), g(t))\| \leq C \underbrace{\|\varepsilon_1(h)\|}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0} \|g(t)\|$

Exemple. Soit $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto B(t)$ deux applications $\mathcal{C}^1$ sur I intervalle, à valeurs dans $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{qr}(\mathbb{K})$ respectivement. Montrer que $t \mapsto A(t)B(t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur I, et donner l'expression de sa dérivée.

$(M,N) \longmapsto MN$ est bilinéaire donc

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)B(t)\right) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$$

Exemple. Soit $t \mapsto A(t)$ une application $\mathcal{C}^1$ sur I intervalle, à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $t \mapsto \left(A(t)\right)^2$ est $\mathcal{C}^1$ sur I, et donner l'expression de sa dérivée.

⚠ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non commutatif.

$f : t \longmapsto A(t) \times A(t) = A^2(t)$

Le produit est bilinéaire donc

$f'(t) = A'(t)A(t) + A(t)A'(t)$

Exemple. Soit F un espace euclidien, $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto g(t)$ deux applications $\mathcal{C}^1$ sur I intervalle, à valeurs dans F. Montrer que $t \mapsto \langle f(t), g(t)\rangle$ et $t \mapsto \|f(t)\|$ sont $\mathcal{C}^1$ sur I, et donner l'expression de leurs dérivées.

- $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est bilinéaire donc $t \mapsto \langle f(t), g(t)\rangle$ est dérivable, de dérivée :

  $$\langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle$$

- $N(t) = \|f(t)\|$

  $= \sqrt{\langle f(t), f(t)\rangle}$

  $= \sqrt{} \circ \left(t \mapsto \langle f(t), f(t)\rangle\right)(t)$

Notons $A = \{t \in I,\ f(t) \neq 0\}$

Pour $t \in A$, $\langle f(t), f(t) \rangle \neq 0$

donc $t \longmapsto \langle f(t), f(t) \rangle$ est à valeurs

dans $\mathbb{R}_+^*$ où $\sqrt{\ }$ est dérivable.

Donc N est dérivable et

$$t \longmapsto \langle f(t), f(t) \rangle \xmapsto{\ \sqrt{\ }\ } \sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle}$$

$$\forall t \in A,\ \frac{d}{dt} \| f(t) \| = \frac{1}{2\sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle}} \times \left(\langle f'(t), f(t) \rangle + \langle f(t), f'(t) \rangle \right)$$

$$= \frac{\langle f'(t), f(t) \rangle}{\| f(t) \|}$$

1.3.4 Multilinéarité

Proposition. Soit $F_1, F_2, \dots, F_p, G$ des espace normés de dimensions finies, I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $M : F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p \to G$ est mutlilinéaire et que les $f_i : I \to F_i$ sont dérivables en a, alors :

$$M(f_1, f_2, \dots, f_p) : \begin{array}{rcl} I & \to & G \\ t & \mapsto & M\big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)\big) \end{array}$$

est dérivable en a et :

$$\big(M(f_1, f_2, \dots, f_p)\big)'(a) = M\big(f_1'(a), f_2(a), \dots, f_p(a)\big) + M\big(f_1(a), f_2'(a), \dots, f_p(a)\big) + \dots + M\big(f_1(a), f_2(a), \dots, f_p'(a)\big)$$

Exemples : ~~$F_1, F_2, F_3 = \mathbb{R}_n[X]$~~

P_1, P_2, P_3 3 polynômes.

$u : t \longmapsto P_1(t) P_2(t) P_3(t)$

On note $M : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y, z) \longmapsto xyz$

M est trilinéaire donc u dérivable et

$$u'(t) = P_1'(t) P_2(t) P_3(t) + P_1(t) P_2'(t) P_3(t) + P_1(t) P_2(t) P_3'(t)$$

Exemple : $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable

$t \longmapsto M(t)$

$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto \det(M(t))$

est-ce que u dérivable ? dérivée ?

On note $\left(C_1(t) \middle| C_2(t) \middle| \dots \middle| C_n(t) \right) = M(t)$

blocs colonnes

$$u(t) = \det \left(C_1(t) \middle| C_2(t) \middle| \dots \middle| C_n(t) \right)$$

det est n-linéaire par rapport à ses colonnes

donc $u'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det \left(C_1(t) \middle| \dots \middle| C_{i-1}(t) \middle| C_i'(t) \middle| C_{i+1}(t) \middle| \dots \right)$

1.3.5 Dérivation d'une fonction composée

Proposition. Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to F$. On suppose :

- $\varphi(I) \subset J$
- φ dérivable en a
- g dérivable en $\varphi(a)$

Alors $g \circ \varphi$ est dérivable en a et :

$$(g \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a)\, g'\big(\varphi(a)\big)$$

Proposition. Avec les notations précédentes, si g est $\mathcal{C}^1$ sur J et φ est $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $g \circ \varphi$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "g\circ\varphi"'] & J\subset\mathbb{R} \arrow[r, "g"] & F \end{tikzcd}$$

$$\overrightarrow{(g\circ\varphi)'(a)} = \overbrace{\varphi'(a)}^{\in\mathbb{R}}\cdot\overrightarrow{g'(\varphi(a))}$$

$$= \overrightarrow{g'(\varphi(a))}\cdot\underbrace{\varphi'(a)}_{\in\mathbb{R}} \quad \Big) \text{ à éviter}$$

par DL.

1.3.6 Caractérisation par les fontions coordonnées

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F, et f_i les applications coordonnées de $f : I \to F$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors f est dérivable en a si et seulement si chaque f_i l'est. Dans ce cas :

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) e_i$$

Proposition. Avec les notations précédentes, f est $\mathcal{C}^1$ si et seulement si chaque f_i l'est.

Exemple. Justifier que $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.

R:

On dérive chaque coefficient (ie chq coord. dans la base canonique)

$$R'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}$$

$$= R\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Preuve: On note $\pi_i : E \longrightarrow \mathbb{K}$ linéaire

$\boxed{\Rightarrow}$

$x \longmapsto$ la coord de x selon e_i

et $f_i = \pi_i \circ f$

donc $f_i'(t) = \pi_i \circ f'(t)$

$\boxed{\Leftarrow}$ $f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i$ et on dérive

1.3.7 Caractérisation des fonctions constantes

Théorème.

Intervalle

Soit $f : I \to F$ une fonction continue sur I, dérivable sur l'intérieur $\mathring{I}$ de I. Alors f est constante si et seulement si sa dérivée est nulle sur $\mathring{I}$.

Preuve par les applications coordonnées.

1.4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition. On a déjà défini le fait que f soit de classe $\mathcal{C}^1$: elle est dérivable et sa dérivée est continue. On définit la classe $\mathcal{C}^k$ par récurrence : f est $\mathcal{C}^{k+1}$ si $f^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
On note $f^{(k)}$ ou $\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsqu'elle est $\mathcal{C}^k$ pour tout k.

Proposition. Si f, g sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans F, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et :

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$$

$\mathcal{C}^k(I, F)$ est un espace vectoriel.

Formule de Leibniz

Proposition. Si f, g sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans F et G respectivement, $B : E \times F \to G$ est bilinéaire, alors $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et :

$$\big(B(f,g)\big)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B\big(f^{(i)}, g^{(k-i)}\big)$$

Preuve : idée

Proposition. Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans F, φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi(J) \subset I$, alors $f \circ \varphi$ est classe $\mathcal{C}^k$ sur J et :

$$\forall t \in J,\ (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t)\, f'\big(\varphi(t)\big)$$

preuve intéressante

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F, et f_i les applications coordonnées de $f : I \to F$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors f est $\mathcal{C}^k$ sur I si et seulement si chaque f_i l'est. Dans ce cas :

$$\forall t \in I,\ f^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)}(t) e_i$$

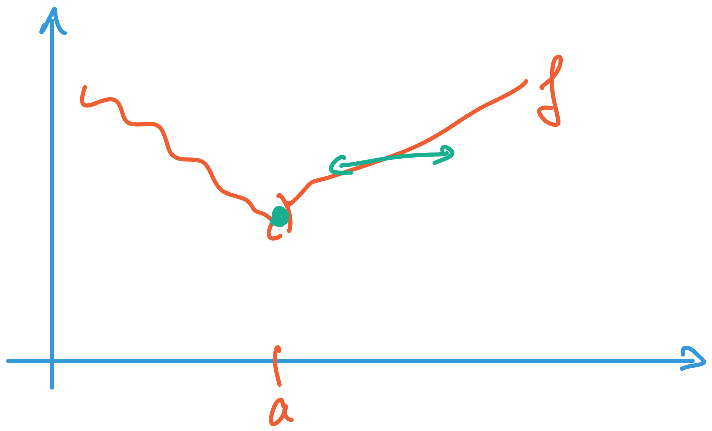
1.5 Limite de la dérivée, classe $\mathcal{C}^k$ par prolongement

Théorème. limite de la dérivée

Soit $f : I \to F$ et $a \in I$. Si

- f est continue sur I (en particulier en a)
- f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$
- $f'(t) \xrightarrow[t \to a]{} \ell$

alors f est dérivable en a, et $f'(a) = \ell$ (et donc f' est continue en a). (en part f "$\mathcal{C}^1$ en a")



Théorème.

Soit $f : I \setminus \{a\} \to F$. Si

- f est $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$
- f, f', ..., $f^{(k)}$ admettent en a une limite ℓ, ℓ_1, ..., ℓ_k respectivement.

alors f se prolonge en a de façon $\mathcal{C}^k$ en posant $f(a) = \ell$, alors $f^{(i)}(a) = \ell_i$ pour tout i.

Th du prolongement $\mathcal{C}^1$

Soit $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow F$

* f est $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$
* $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$
* $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1$

Alors f se prolonge à I de façon $\mathcal{C}^1$ en posant $f(a) = \ell$.

Et on a $f'(a) = \ell_1$

⚠ il n'y a pas de prolongement de la dérivée, mais dérivabilité du prolongement.

2 Intégration des fonctions à valeurs vectorielles

2.1 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

Définition. Soit $f : I = [a, b] \to F$. On dit que f est **en escalier** lorsqu'il existe une subdivdision $(a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, f est constante, et on note $\vec{v_i}$ cette constante.
Avec les notations précédente, pour f en escalier, on définit l'**intégrale de f sur** $[a, b]$ par :

$$\int_a^b \overrightarrow{f(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{i-1} (a_{i+1} - a_i)\vec{v_i}$$

qui ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à f.

$$\begin{aligned} f : [a,b] &\longrightarrow F \\ t &\longmapsto \overrightarrow{f(t)} \end{aligned}$$

$\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ où $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$

f cpm

$f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ se prolonge à $[a_i, a_{i+1}]$ de façon continue

2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Rappel. Toute fonction continue par morceaux sur un segment, à valeurs dans un espace normé de dimension finie, est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

Preuve. Dans une base donnée, on approche chaque fonction coordonnée. □

Définition. Soit $f : [a, b] \to F$ une fonction continue par morceaux, et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Alors $\left(\int_a^b g_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et sa limite est indépendante du choix de la suite $(g_n)_n$. On appelle **intégrale de f sur $[a, b]$** cette limite commune.

Proposition. Relation de Chasles.

Proposition. Si f et g sont continues par morceaux sur $[a,b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f + \mu g$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition. Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs dans F, et $u \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $u \circ f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et :

$$\int_a^b u \circ f(t)\,\mathrm{d}t = u\Big(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big)$$

Preuve:

Soit $(g_n)_n$ suite de fct en escalier qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$

Pour n fixé, g_n est en escalier.

Soit $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_p)$ subd de $[a,b]$ adaptée à g_n et $g_n|_{]a_i, a_{i+1}[}$ constante notée v_i

$$u\Big(\int_a^b g_n(t)\,dt\Big) = u\Big(\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\, v_i\Big)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\, u(v_i)$$

par linéarité de u

or $u \circ g_n$ est en escalier, σ subd adaptée et $u \circ g_n \big|_{]a_i, a_{i+1}[} = u(v_i)$

Donc $\displaystyle\int_a^b u \circ g_n(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\, u(v_i)$

<u>Bref</u> $\displaystyle\int_a^b u \circ g_n(t)\,dt = u\left(\int_a^b g_n(t)\,dt\right)$

(pour g_n en escalier)

- <u>À la limite pour $n \to +\infty$</u> ?

  * $g_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} f$

  $[a,b]$ segment

  donc $\displaystyle\int_a^b g_n(t)\,dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt$

  Avec u linéaire, en dim finie, donc continue

  donc $u\left(\displaystyle\int_a^b g_n(t)\,dt\right) \longrightarrow u\left(\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right)$

  * est-ce que $u \circ g_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} u \circ f$ sur $[a,b]$

  $\| u \circ g_n(t) - u \circ f(t) \|_G = \| u((g_n - f)(t)) \|_G$

  $\leq |||u|||\ \|(g_n - f)(t)\|_F$

  $\leq |||u|||\ N_\infty^F(g_n - f)$ indép de t

  $\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $u \circ g_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} u \circ f$ sur $[a,b]$

or $[a,b]$ segment donc

$$\int_a^b u \circ g_n(t)\,dt \longrightarrow \int_a^b u \circ f(t)\,dt.$$

<u>CCl</u> : $\displaystyle\int_a^b u \circ f(t)\,dt = u\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)$

pour u linéaire

$$\pi_i : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \text{la } i^e \text{ coord} \end{array}$$

Proposition. Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs dans F. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F et f_i les applications coordonnées de f. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_I f_i(t)\,\mathrm{d}t \Big) e_i$$

C'est-à-dire que les coordonnées de l'intégrale sont les intégrales des fonctions coordonnées.

Exemple. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} A(t)\,\mathrm{d}t$ où $A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

$$\int_0^{\pi/2} A(t)\,dt = \begin{pmatrix} \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt & \int_0^{\pi/2} -\sin t\,dt \\ \int_0^{\pi/2} \sin t\,dt & \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition. Soit $f : [a, b] \to F$ continue par morceaux et $\|\cdot\|$ une norme sur F. Lorsque $a \leqslant b$:

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Preuve: Soit $(g_n)_n$ suite de fct en escalier sur $[a,b]$ qui cv unif. vers f.

- n fixé On note $g_n\big|_{]a_i,a_{i+1}[} = v_i$

$$\|g_n\|\big|_{]a_i,a_{i+1}[} = \|v_i\|$$

$$\left\|\int_a^b g_n(t)\,dt\right\| = \left\|\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i)\,v_i\right\|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i)\,\|v_i\|$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1}-a_i)\,\|g_n\|\big|_{]a_i,a_{i+1}[}$$

$$= \int_a^b \|g_n\|(t)\,dt$$

puis passage à la limite par cv uniforme comme dans la preuve précédente.

Proposition. Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$, à valeurs dans F. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues par morceaux, qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f continue par morceaux. Alors :

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

À mettre plus haut

(par fct coordonnées)

2.3 Sommes de Riemann

Proposition. Soit f continue par morceaux sur $[0,1]$. Alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition. Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

2.4 Primitives

Définition. On appelle **primitive** de $f : I \to F$ toute fonction $F : I \to F$ dérivable telle que $F' = f$.

Théorème.

Soit $f : I \to F$ et $a \in I$. Si f est continue sur I, alors f possède une unique primitive qui s'annule en a, et c'est :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

2.5 Accroissements finis, formules de Taylor

Inégalité des accroissaments finis.

Soit $f\,:\,I \to F$ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur I et $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall t \in\,]a,b[,\ \|f'(t)\| \leqslant M$$

Alors :

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant M|b-a|$$

Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors pour tout $a, x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

ou encore, pour tout $a \in I$ et h tel que $a+h \in I$:

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_0^{a+h} \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+t)\,\mathrm{d}t$$

Inégalité de Taylor-Lagrange.

Soit $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, telle que $f^{(n+1)}$ bornée sur I. Alors pour tout $a, x \in I$:

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty^I$$

ou encore, pour tout $a \in I$ et h tel que $a+h \in I$:

$$\left\| f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty^I$$

Formule de Taylor-Young.

Soit $f : I \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, alors pour tout $a \in I$, au voisinage de $h \to 0$:

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + h^n \varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0_E$.
On note $\mathrm{o}(h^n)$ pour désigner la fonction vectorielle $h \mapsto h^n \varepsilon(h)$.