X compact $\Leftrightarrow$ de toute suite d'éléments de X on peut extraire une suite qui cv dans X.

Si X compact alors X fermé et borné.

Si X est fermé et $X \subset$ compact alors X compact.

3 Applications continues sur une partie compacte

3.1 Image d'un compact par une application continue

Théorème.

L'image d'un compact par une application continue est compacte.

Remarque. *Il s'agit ici de l'image (directe) d'un compact par une application continue, qui est compacte. On sait aussi que l'image réciproque d'un ouvert (resp. d'un fermé) par une application continue est un ouvert (resp. un fermé).*

Soit $f : E \longrightarrow F$ continue

X compact de E

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue
$[a,b]$ segment
$f([a,b])$ est un segment

Mq $f(X)$ est compact "image directe de X par f".

Soit $(y_n)_n$ suite d'éléments de $f(X)$

$\forall n, \ \exists x_n \in X$ tq $y_n = f(x_n)$

$(x_n)_n$ est une suite de X compact

donc $\exists \varphi$ extractrice tq $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers $\ell \in X$

Alors $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)})$

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\ell)$ par continuité de f

donc on a extrait de $(y_n)_n$ une suite qui cv vers $f(\ell) \in f(X)$

Ccl $f(X)$ compact.

⚠ $f^{-1}(F)$ fermé par f continue, F fermé.

image réciproque d'un compact $\longrightarrow$ pas de résultat

image directe d'un fermé $\longrightarrow$ pas de résultat.

Théorèmes des bornes atteintes.

Soit E un espace vectoriel normé, et X une partie compacte de E. Soit :

$$f : X \subset E \to \mathbb{R}$$

Si f est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Remarque.

- *f atteint un minimum et un maximum sur X.*
- *C'est un théorème très utilisé pour montrer l'existence d'un maximum ou d'un minimum. On peut aussi se ramener à l'utilisation de ce théorème à l'aide d'une restriction à un compact.*

Rmq : Si $f : E \longrightarrow F$

on peut appliquer ce th à $\|f\|_F : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \|f(x)\|_F$

Preuve : Par le th précédent, comme f continue et X compact

$f(X)$ est compact donc

$f(X) = \{f(x), x \in X\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$,

non vide ($\operatorname{car} X \neq \emptyset$) donc admet une borne sup

notée $M = \sup\limits_{x \in X} f(x) = \sup f(X)$ Max ? $\exists x_0$ tq $M = f(x_0)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M - \frac{1}{n} < \sup f(X)$

donc $M - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de $f(X)$

donc $\exists y_n \in f(X)$ tq $M - \frac{1}{n} < y_n \leq M$

$\exists x_n \in X$ tq $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$

On a une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X compact

donc $\exists \varphi$ extractrice tq

$(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers $\ell \in X$.

$\forall n,$
$$M - \frac{1}{\varphi(n)} < f(x_{\varphi(n)}) \leq M$$

$M - \frac{1}{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} M$ car $\varphi(n) \geq n$

$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\ell)$ par continuité de f en $\ell \in X$

Donc, à la limite

$$M \leq f(\ell) \leq M$$

Bref $M = \sup_{x \in X} f(x) = f(\ell)$

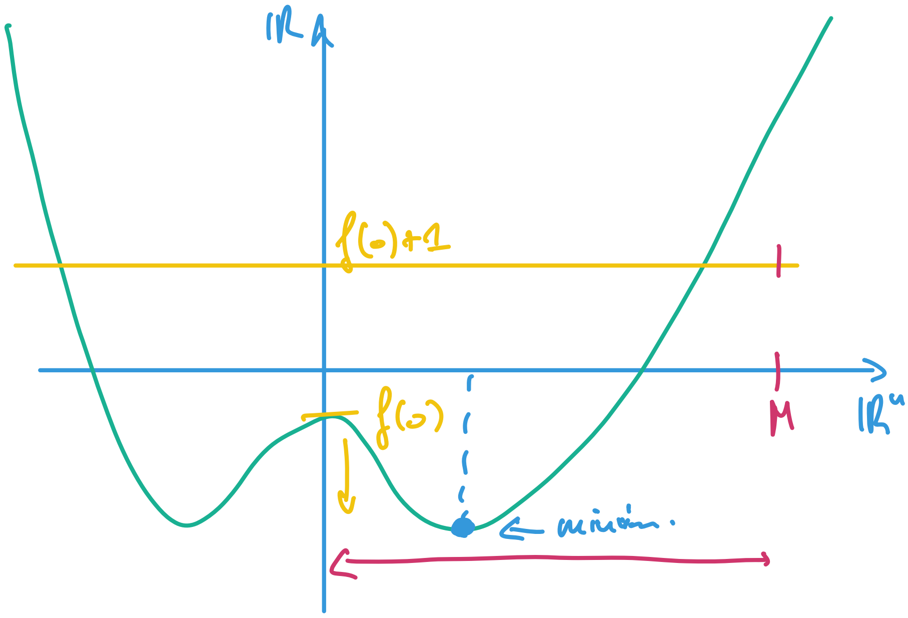
est atteint en $x = \ell$

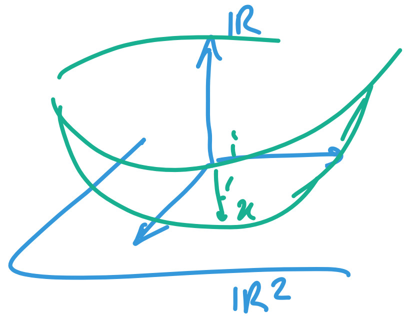
c'est un Max.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que :

$$f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$$

Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.





- Par déf de $f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$ avec $f(0)+1$

  $\exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall x$, $\|x\| > M \Rightarrow f(x) \geq f(0)+1$

- f est continue sur $BF(0, M)$ fermée et bornée dans $\mathbb{R}^n$ de dim finie donc compacte

  donc f admet un minimum <u>sur $BF(0,M)$</u>

  On note m ce minimum (c'est $f(x_0)$, où $\|x_0\| \leq M$)

- $\forall x \in \mathbb{R}^n$

  - si $x \in BF(0,M)$, $f(x) \geq m$ par déf de m
  - sinon $\|x\| > M$ donc $f(x) \geq f(0)+1$

    $\geq m+1$ car $0 \in BF(0,M)$.

    $\geq m$

3.2 Continuité uniforme

Théorème de Heine.

Une fonction continue sur un compact est uniformément continue sur ce compact.

Déf : f est uniformément continue sur X compact

signifie :

$\forall \varepsilon>0, \exists \alpha>0$ tq $\forall y \in X, \forall x \in X$ $\|x-y\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| \leq \varepsilon$

Par l'absurde. On suppose f n'est pas uniformément continue.

donc $\exists \varepsilon>0$ tq $\forall \alpha>0, \exists y \in X, \exists x \in X$ - - -

pour $n \in \mathbb{N}^*$, on applique ceci avec $\alpha = \frac{1}{n}$

d'où l'existence de $y_n \in X$, $x_n \in X$ tq

$$\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon$$

$(x_n, y_n)_n$ est une suite de $X \times X$ compact comme produit de compact.

donc $\exists \varphi$ extractrice tq

$$(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})_n \text{ converge dans } X \times X$$

On note (a, b) la limite i.e. $x_{\varphi(n)} \to a$

$y_{\varphi(n)} \to b$

On a : • $\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\| \leq \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n}$ $\forall n$

$$\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|a-b\| \qquad \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc à la limite

$$0 \leq \|a-b\| \leq 0$$

donc $\underline{a=b}$

- $\forall n \quad \|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\| > \varepsilon > 0$

À la limite pour $n \to +\infty$, avec f continue

$$\underbrace{\|f(a)-f(b)\|}_{=0} \cancel{\geq} \varepsilon > 0$$

Contradiction.

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

4.1 Exemples : compacts de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

De toute suite bornée de réels ou de complexes on peut extraire une suite convergente.

Remarque. *Ce théorème, démontré en première année par dichotomie, peut s'exprimer maintenant en disant que toute suite bornée de réels ou de complexes admet au moins une valeur d'adhérence.*

Preuve : Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de réels,

$\exists M$ tq $\forall n$ $|u_n| \leq M$

donc $(u_n)_n$ est une suite de $[-M, M]$

fermé et borné dans $\mathbb{R}$ de dim finie donc compact.

(on dit directement que $[-M, M]$ compact)

donc $\exists \varphi$ extractrice tq $(u_{\varphi(n)})_n$ converge

dans $[-M, M]$.

Corollaire. Les compacts de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{C}$) sont les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{C}$).

Remarque.

- *Les segments sont des compacts de $\mathbb{R}$, ce sont les intervalles compacts. Mais il y a beaucoup de compacts qui ne sont pas des intervalles.*
- *Tout compact X de $\mathbb{R}$ est fermé et borné, donc inclus dans $[\text{Inf}(X), \text{Sup}(X)] = [\text{Min}(X), \text{Max}(X)]$. C'est pour cela que, sur $\mathbb{R}$, les expressions « sur tout compact » ou « sur tout segment » ont le même sens.*

$[0,1] \cup [3,4]$ compact

4.2 Équivalence des normes en dimension finie

Théorème.

> Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire. Si E est de dimension finie, le caractère borné d'une partie, d'une suite ou d'une fonction ne dépend pas du choix de la norme. De même, le caractère ouvert, fermé ou dense d'une partie de dépend pas du choix de la norme.

Preuve cas de $\mathbb{R}^2$

On considère $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$

$N(x,y)$ une autre norme

Mq $\|\cdot\|_\infty$ et N sont équivalentes. $\alpha\|\cdot\|_\infty \leq N \leq \beta\|\cdot\|_\infty$

Soit $e_1=(1,0)$ $\quad e_2=(0,1)$

• $N(x,y) = N(xe_1+ye_2)$

$\leq |x|\,N(e_1) + |y|\,N(e_2)$

par inég triang + homogénéité

$$\leq \|(x,y)\|_\infty \underbrace{\left(N(e_1)+N(e_2)\right)}_{\beta \text{ constante}}$$

On a montré: $N \leq \beta\|\cdot\|_\infty$

• On cherche $\alpha>0$ tq

$\forall x,y \quad \alpha\|(x,y)\|_\infty \leq N(x,y)$

ie α minore $\dfrac{N(x,y)}{\|x,y\|_\infty} = N\left(\underbrace{\dfrac{(x,y)}{\|(x,y)\|_\infty}}_{\text{de norme 1 pour } \|\cdot\|_\infty}\right)$

- $N : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ <u>continue</u>

car β-lipschitzienne :

$|N(x,y) - N(x',y')| \leqslant N((x,y)-(x',y'))$

par inég triang. inversée

$= N(x-x', y-y')$

$\leqslant \beta \, \|(x,y)-(x',y')\|_\infty$

- $S_{\|\cdot\|_\infty}(0,1)$ est fermée $\left(\|\cdot\|_\infty^{-1}(\{1\})\right)$

et bornée $\left(\subset BF_{\|\cdot\|_\infty}(0,1)\right)$

dans $\mathbb{R}^2$ de dim finie

donc $S_{\|\cdot\|_\infty}(0,1)$ est <u>compacte</u>

- Par le th des bornes atteintes, N admet

un minimum noté α sur $S_{\|\cdot\|_\infty}(0,1)$.

$\exists (x_0, y_0) \in S_{\|\cdot\|_\infty}(0,1)$ qui réalise ce

minimum : $\alpha = N(x_0, y_0)$

et $\|(x_0, y_0)\|_\infty = 1$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$N(x,y) = \|(x,y)\|_\infty \times N\left(\underbrace{\frac{(x,y)}{\|(x,y)\|_\infty}}_{\in S(0,1)}\right)$$

$$\geq \|(x,y)\|_\infty \ \alpha$$

et de plus $\quad \alpha = N((x_0, y_0))$

$> 0 \quad$ car $(x_0, y_0) \neq (0,0)$

car $\|(x_0, y_0)\|_\infty \neq 0$.

Corollaire. Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $(x_p)_p$ une suite de E. On note $(x_p^k)_p$ les suites coordonnées, c'est-à-dire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$x_p = \sum_{k=1}^{n} x_p^k e_k$$

Alors :

$$(x_p)_p \text{ converge dans } E \iff \forall k \in \{1, \dots, n\},\ (x_p^k)_p \text{ converge dans } \mathbb{K}$$

Dans ce cas, en notant ℓ la lmite de $(x_p)_p$ et ℓ_k celle de $(x_p^k)_p$, on a :

$$\ell = \sum_{k=1}^{n} \ell_k e_k$$

Corollaire. Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $f : X \to E$ une application à valeurs dans E. On note $f_1, \dots, f_n$ les applications coordonnées, c'est-à-dire que, pour tout $x \in X$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k$$

Alors :

$$f \text{ a une limite en } x_0 \iff \forall k \in \{1, \dots, n\},\ f_k \text{ a une limite en } x_0$$

Dans ce cas, en notant ℓ la lmite de f en x_0 et ℓ_k celle de f_k, on a :

$$\ell = \sum_{k=1}^{n} \ell_k e_k$$

<u>Preuve</u> : par $\|\cdot\|_\infty$

4.3 Compacts d'un espace de dimension finie

Théorème.

> Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.

Remarque. *Ainsi, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence, ou encore de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.*

Preuve: Cas de $\mathbb{R}^2$

$\boxed{\Rightarrow}$ déjà vu

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit X une partie de $\mathbb{R}^2$ fermée et bornée.

muni de N

On choisit $\|\cdot\|_\infty$, équivalente à N,

X est encore fermée bornée.

Donc $\exists M$ tq $\forall (x,y) \in X$, $\|(x,y)\|_\infty \leq M$

i.e. $|x| \leq M$ et $|y| \leq M$

donc $X \subset [-M,M] \times [-M,M]$

Compact comme produit de compacts.

X est fermé dans $[-M,M]^2$ compact

donc compact (pour $\|\cdot\|_\infty$)

donc compact pour N car la

cv des suites ne dépend pas du choix de

la norme car N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes

Corollaire. Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, une suite $(u_n)_n$ bornée converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Corollaire. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $(E, \|\cdot\|)$, alors F est fermé.

Si $\|u_n\| \leq M$ $\forall n$,

$u_n \in BF(0,M)$ compact car E de dim finie

+ § 2.2

Preuve. Soit $(x_n)_n$ suite d'éléments de F

qui converge vers $y \in E$ pour $\|.\|_E$

Donc $(x_n)_n$ est bornée pour $\|.\|_E$.

On travaille dans F, muni de la norme induite par $\|.\|_E$, notée $\|.\|_F$.

L'ev normé $(F, \|.\|_F)$ est de dimension finie, et contient la suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il existe donc une boule $BF(0,M)$ dans $(F, \|.\|_F)$ contenant tous les termes de la suite.

Cette boule est fermée bornée dans F de dim finie, donc compacte.

On extrait de $(x_n)_n$ une suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge, dans F, vers une limite $z \in F$.

De retour dans E, $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers z, et aussi vers y, donc $y = z$ et donc $y \in F$.