Pour me : 460.1, 460.3, 460.5, 460.6

Compacité

1 Suites extraites, valeurs d'adhérence d'une suite

1.1 Suites extraites

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments d'un ensemble X. On dit que v **est extraite de** u lorsqu'il existe une application $\varphi\ :\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$$

L'application φ s'appelle **extractrice**.

Exemple. En posant $v_n = u_{2n}$, on définit la suite extraite de $(u_n)_n$ des termes d'indices pairs. Ici, $\varphi\ :\ n\mapsto 2n$.

$u = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, \dots)$

$v = (u_0, u_1, u_4, u_6, \dots)$

$\quad\ \ v_0 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \dots$

$$\begin{array}{rcl} \varphi :\ \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ 0 & \longmapsto & 0 \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 4 \\ 3 & \longmapsto & 6 \\ \vdots & & \end{array}$$

Remarque. *Si $(u_{\varphi(n)})_n$ est extraite de $(u_n)_n$, et que ψ désigne une autre extractrice, la suite extraite de $(u_{\varphi(n)})_n$ est-elle :*

$$(u_{\psi\circ\varphi(n)})_n \text{ ou } (u_{\varphi\circ\psi(n)})_n\ ?$$

la suite extraite est constituée d'éléments de $\{u_{\varphi(n)}, n\}$

$\longrightarrow$ c'est $u_{\varphi\circ\psi(n)}$

Proposition. Si φ est une extractrice, c'est-à-dire une application : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$$

Preuve: par récurrence

- $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geq 0$
- On suppose $\varphi(n) \geq n$

$\varphi(n+1) > \varphi(n)$ par stricte croissance

$\geqslant n$

donc $\varphi(n+1) > n$

or $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) \geq n+1$

Ainsi: $\forall n \in \mathbb{N}\ \varphi(n) \geq n$

1.2 Valeurs d'adhérence d'une suite

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, et $a \in E$. On dit que a **est une valeur d'adhérence de** $(u_n)_n$ si et seulement s'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers a.

Exemple. Les valeurs 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de la suite $\left(\cos\frac{n\pi}{2}\right)_n$.

(0) $\exists \varphi$ extractrice tq $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

Proposition. On conserve les notations de la définition. Alors a est valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(*i*) $\forall \varepsilon > 0,\ \{n \in \mathbb{N},\ u_n \in B(a,\varepsilon)\}$ est infini ;

(*ii*) $\forall \varepsilon > 0,\ \{n \in \mathbb{N},\ u_n \in B(a,\varepsilon)\}$ est non majoré ;

(*iii*) $\forall \varepsilon > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \{n \geqslant p,\ u_n \in B(a,\varepsilon)\}$ est non vide.

Preuve.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Soit $\varepsilon>0$. On applique (i)

$\{n \in \mathbb{N}$ tq $u_n \in B(a,\varepsilon)\}$ est infini

c'est une partie de $\mathbb{N}$ infinie donc non majorée

(les parties de $\mathbb{N}$ majorées par M sont $\subset [\![0, \lfloor M \rfloor]\!]$ finie)

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Soit $\varepsilon>0$. Soit $p \in \mathbb{N}$

Par (ii) $\{n \in \mathbb{N}$ tq $u_n \in B(a,\varepsilon)\}$ non majoré

donc p ne majore pas cet ensemble

donc $\exists n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant p$ tq $u_n \in B(a,\varepsilon)$

(iii) $\Rightarrow$ (0) (iii) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\{n \geqslant p,\ u_n \in B(a, \varepsilon)\}$ est non vide.

On cherche φ extractrice ie $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st $\nearrow$.

tq $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} a$

- On pose $\varphi(0) = 0$
- Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose $\varphi(n)$ construit tq $u_{\varphi(n)} \in B(a, \frac{1}{n})$

Par (iii) avec $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ et $p = \varphi(n)+1$

$\{ n \geqslant \varphi(n)+1$ tq $u_n \in B(a, \frac{1}{n+1}) \}$ non vide

on note $\varphi(n+1)$ l'un de ses éléments.

On a construit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante

car $\varphi(n+1) \geqslant \varphi(n)+1$ et

$\forall n \quad \| u_{\varphi(n)} - a \| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

(0) $\Rightarrow$ (i) Soit $\varepsilon > 0$,

par déf de limite avec ce ε

$\exists N$ tq $\forall n \geqslant N \quad u_{\varphi(n)} \in B(a, \varepsilon)$

donc $\{n \in \mathbb{N} \text{ tq } u_n \in B(a, \varepsilon)\}$

contient $\{\varphi(n), n \geqslant N\}$ qui est infini

Proposition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Si $(u_n)_n$ est convergente, alors elle admet une unique valeur d'adhérence, qui est sa limite.

Remarque. *La réciproque est fausse en général : une suite peut n'admettre qu'une seule valeur d'adhérence et ne pas être convergente.*

Exemple : $u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

$(u_n)_n$ admet une unique val d'adhérence (0)

mais n'est pas convergente.

Preuve : Soit $(u_n)_n$ tq $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

On suppose que a est une val. d'adhérence de $(u_n)_n$.

Soit φ extractrice tq $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par déf de $u_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell$

$\exists N$ tq $\forall n \geqslant N, \; \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$

en part $\forall n \geqslant N, \; \varphi(n) \geqslant n \geqslant N$

donc $\|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leqslant \varepsilon$

Ainsi $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

donc $a = \ell$ par unicité.

2 Parties compactes d'un espace vectoriel normé

2.1 Définition

Définition. Une partie X de E est dite **compacte** lorsque, de toute suite d'éléments de X, on peut extraire une suite converge dans X.

Remarque.

- *Il est équivalent de dire que toute suite d'élément de X a au moins une valeur d'adhérence dans X.*
- *L'ensemble vide $\varnothing$ est compact.*
- *Cette définition est dite «* de Bolzano-Weierstrass *», par opposition à celle de Borel-Lebesgue qui est hors programme.*

En 1re année : Si $(u_n)_n$ suite réelle bornée,
on peut extraire une suite convergente (dans $\mathbb{R}$)

$(u_n)_n$ suite réelle bornée :

$\exists M>0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [-M, M]$

fermé
borné
dans $\mathbb{R}$ de dim finie
donc compact

donc il existe une suite extraite qui cv dans $[-M, M]$.

2.2 Propriétés

Proposition. Toute partie compacte est fermée et bornée.

Remarque. *Nous verrons plus tard que, si E est de dimension finie, la réciproque est vraie. Dans le cas d'un espace de dimension infinie, ce n'est pas le cas.*

Preuve :

Soit X un compact.

- Mque X est fermé par caract. séquentielle

Soit $(u_n)_n$ suite convergente d'éléments de X.

On note l sa limite.

Par compacité, il existe φ extractrice tq

$(u_{\varphi(n)})_n$ converge dans X

Or $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ comme suite extraite d'une suite cv

donc $l \in X$.

- Mque X est borné par l'absurde.

On suppose X non borné.

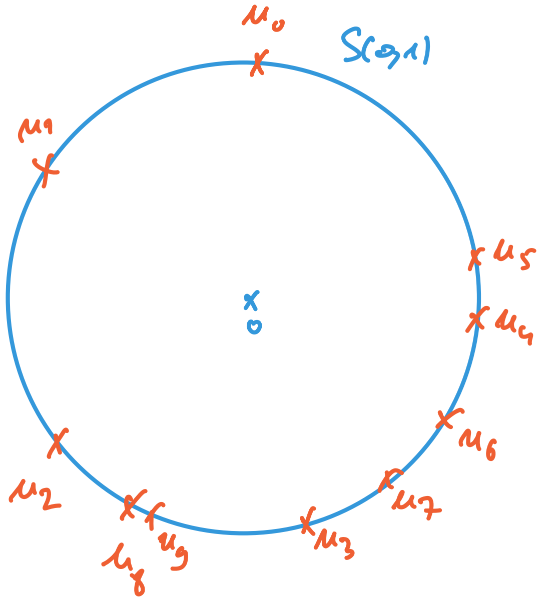
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X$ tq $\|x_n\| \geq n$

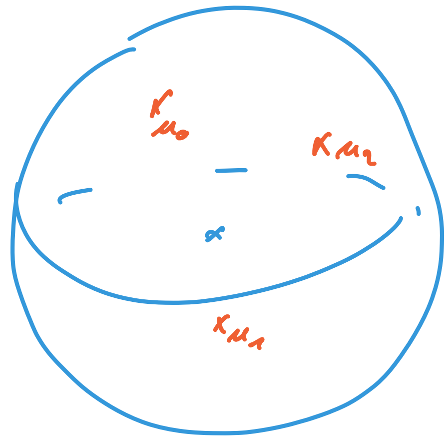
$(x_n)_n$ est une suite de X compact, donc on peut en extraire une suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de limite l.

$$\|x_{\varphi(n)}\| \geq \varphi(n) \geq n$$

$$\|x_{\varphi(n)}\| \to \|l\| \qquad n \to +\infty$$

contradiction



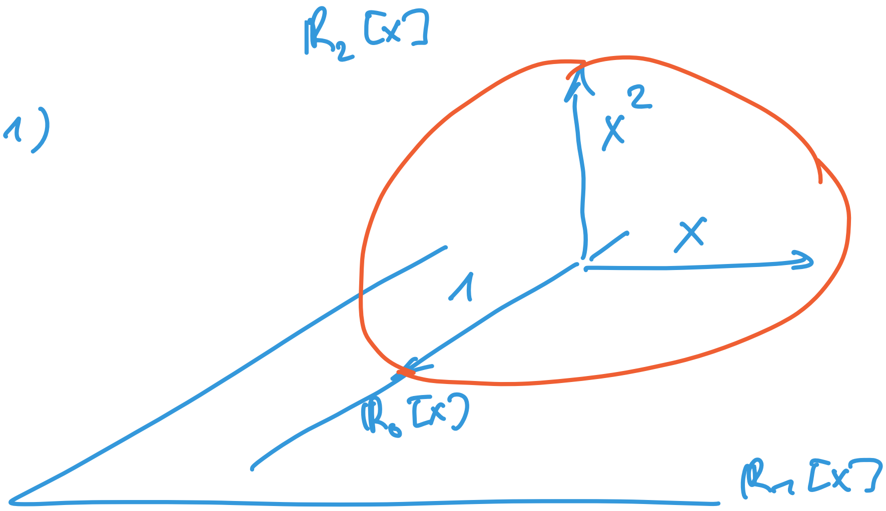


Exemple. On munit l'espace $E = \mathbb{K}[X]$ de la norme :

$$\|P\|_\infty = \operatorname*{Max}_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$$

où les a_k sont les coefficients du polynôme P. Trouver une suite d'éléments de $S(0,1)$ qui n'admette aucune valeur d'adhérence. Qu'a-t-on montré ?

$P_n = X^n \in S(0,1)$



Mq $(P_n)_n$ n'a pas de val d'adhérence

Par l'absurde. On suppose $\exists \varphi$ extraction, $Q \in \mathbb{R}[X]$

tq $P_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} Q$

ie $\| P_{\varphi(n)} - Q \|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$X^{\varphi(n)}$ $\quad$ $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_d X^d$

On note $Q = a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d$.

Pour $n > d$, $\varphi(n) > d$ donc

$$\| X^{\varphi(n)} - Q \|_\infty \geq 1$$

coeff devant $X^{\varphi(n)}$

$$\downarrow_{n \to +\infty}$$

$$0$$

contradiction.

On a trouvé une suite de $S(0,1)$ sans val d'adhérence. Donc <u>$S(0,1)$ n'est pas compacte.</u>

<u>Pourtant, c'est un fermé borné :</u>

- $S(0,1) = \{ P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \|P\|_\infty = 1 \}$

$$= \varphi^{-1}(\{1\})$$

où $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$, $P \longmapsto \|P\|_\infty$ continue (norme)

et $\{1\}$ est fermé

Donc $S(0,1)$ est fermée.

- $S(0,1) \subset BF(0,1)$ donc est bornée.

Théorème.

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.

<u>460.1</u> $O_n(\mathbb{R})$ compact

Proposition. Un fermé relatif A d'une partie compacte X est un compact.

Remarque.

- *Comme X est compacte, c'est en particulier un fermé et donc dire que A est un fermé relatif de X revient à dire que c'est un fermé de E.*
- *On a en fait l'équivalence, lorsque $A \subset X$ et X compacte :*

$$A \text{ fermée} \iff A \text{ compacte}$$

Preuve :

Soit $(u_n)_n$ suite d'éléments de A

où A est fermé relatif de X.

Donc $(u_n)_n$ est une suite d'éléments de X

donc $\exists \varphi$ extractrice et $\underset{X}{\overset{\cap}{a}}$ tq $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

Donc $(u_{\varphi(n)})_n$ est une suite convergente dans X

d'éléments de A donc convergente dans A

(car A fermé relatif de X, caract séquentielle)

De toute suite d'éléments de A, on peut extraire une

suite qui cv dans A, donc A compact.

Proposition. Une suite d'éléments de X compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

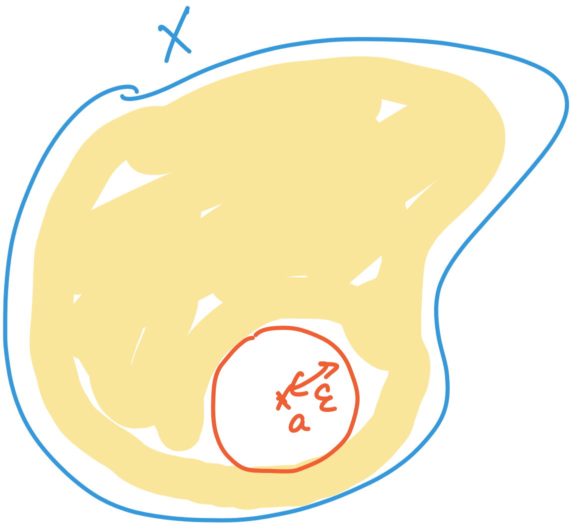
Preuve: $\boxed{\Rightarrow}$ déjà vu

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $(u_n)_n$ suite d'élément de X.

On suppose que a est son unique val. d'adhérence.

On suppose que $u_n \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} a$

donc $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall n_0, \exists n \geq n_0$ $\|u_n - a\| > \varepsilon$



avec $n_0 = 0$, $\exists \varphi(0)$ tq $\|u_{\varphi(0)} - a\| > \varepsilon$

On suppose $\varphi(n)$ construit.

avec $n_0 = \varphi(n)+1$, $\exists \varphi(n+1)$ tq

$\|u_{\varphi(n+1)} - a\| > \varepsilon$

On a construit $(u_{\varphi(n)})_n$ suite d'élément de $X \setminus Bf(a, \varepsilon)$

Comme X compact, on peut extraire une suite cv dans X de $(u_{\varphi(n)})_n$: $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_n$ converge vers $b \in X$

Donc b est une autre val d'adhérence de $(u_n)_n$.

$\hookrightarrow$ $\forall n$ $\|u_{\varphi(n)} - a\| > \varepsilon$

donc à la limite $\|b - a\| \geq \varepsilon > 0$

2.3 Produit d'une famille finie de compacts

Proposition. Soit $(E_1, \|\cdot\|_1)$, ..., $(E_p, \|\cdot\|_p)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On considère, pour chaque $i \in \{1, \ldots, p\}$, un compact X_i de E_i. Alors : $X = X_1 \times \cdots \times X_p$ est un compact de $E = E_1 \times \cdots \times E_p$, muni de la norme produit.

Remarque. *Ainsi, un produit (fini) de compacts est compact.*

$p=2$

Rappel : $(E_1, \|.\|_1)$ $(E_2, \|.\|_2)$

$E_1 \times E_2$ est muni de la structure produit

(x, y)

muni d'une norme produit

$$\|(x,y)\| = \operatorname{Max}(\|x\|_1, \|y\|_2)$$

Preuve : Soit $(u_n)_n$ suite de $X_1 \times X_2$

$\forall n$ $u_n = (x_n, y_n)$ où $x_n \in X_1$, $y_n \in X_2$

$(x_n)_n$ est une suite de X_1 compact, donc

$\exists \varphi$ extractrice tq $(x_{\varphi(n)})_n$ cv dans X_1 vers a.

~~$(y_n)_n$ est ... X_2 compact ... $(y_{\varphi(n)})_n$ ...~~

$(y_{\varphi(n)})_n$ est une suite de X_2 compact donc

$\exists \psi$ extractrice tq $(y_{\varphi\circ\psi(n)})_n$ cv dans X_2 vers b.

$(x_{\varphi\circ\psi(n)})_n$ est extraite de $(x_{\varphi(n)})_n$ cv vers a

donc $x_{\varphi\circ\psi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

Ainsi $\quad u_{\varphi \circ \psi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} (a, b)$

Se généralise au produit (fini) de φ compacts.