Pour les 7h : à rédiger 310.19 ou 310.20 ou 310.38 (*)

Limite, continuité dans un espace vectoriel normé

Dans ce chapitre, sauf mention contraire, E et F désigne deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Limite

1.1 Définition, propriétés

Définition. Soit $f : A \subset E \to F$, et $a \in \overline{A}$. On dit que f **a pour limite** b **en** a, et on note $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$, lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|x-a\|_E \leqslant \eta \implies \|f(x)-b\|_F \leqslant \varepsilon$$

$$f : A \subset (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_F)$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Remarque. *On peut reformuler la définition en termes de boules.* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ *signifie :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A \cap BF(a,\eta),\ f(x) \in BF(b,\varepsilon)$$

Définition. Soit $f : A \subset E \to F$. On dit que $f(x)$ tend vers 0 lorsque $\|x\| \to +\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} 0_F$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ \|x\| \geqslant M \implies \|f(x)\|_F \leqslant \varepsilon$$

Rmq : on peut énoncer les déf avec des inég. strictes

Proposition. La limite de f en a, si elle existe, est unique.

Proposition. L'existence et la valeur de la limite sont inchangées par passage à d'autres normes sur E et F, lorsqu'elles sont équivalentes aux normes initiales.

1.2 Caractérisation séquentielle

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$, et $a \in \overline{A}$ et $b \in F$. f a pour limite b en a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b.

Preuve : comme dans $\mathbb{R}$

(cf cours de 1re année)

1.3 Cas particulier de $\mathbb{R}$

Remarque. *Lorsque $E = \mathbb{R}$ on peut envisager les limites lorsque $x \to \pm\infty$, et lorsque $F = \mathbb{R}$, on peut envisager des limites infinies, même s'il serait abusif de dire que $+\infty$ est adhérent à $]-\infty, +\infty[$. On peut donc adapter les définitions vues en première année.*

Définition. Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to F$ une fonction de la variable réelle, où A n'est pas majorée. On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} b$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \geqslant M \implies \|f(x) - b\| \leqslant \varepsilon$$

Définition. Soit $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ une fonction numérique réelle, et $a \in \overline{A}$. On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ lorsque :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| \leqslant \eta \implies f(x) \geqslant M$$

1.4 Opérations sur les limites

Proposition. Soit $f, g : A \subset E \to F$ deux fonctions, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ deux scalaires. Soit $a \in \overline{A}$.

- Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} c$, alors $(\lambda f + \mu g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda b + \mu c$.

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$ une fonction, $\varphi : A \subset E \to \mathbb{K}$ une fonction numérique. Soit $a \in \overline{A}$.

- Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ et $\varphi(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda$, alors $(\varphi f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda b$.
- Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0_F$ et λ bornée au voisinage de a, on écrit :

$$\|\lambda(x) f(x)\| \leqslant M \|f(x)\| \xrightarrow[x \to a]{} 0_{\mathbb{R}}$$

  pour conclure que $\lambda(x) f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0_F$.

- Si f est bornée au voisinage de a, $\lambda(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0_{\mathbb{K}}$, on écrit :

$$\|\lambda(x) f(x)\| \leqslant \|\lambda(x)\| M \xrightarrow[x \to a]{} 0_{\mathbb{R}}$$

  pour conclure que $\lambda(x) f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0_F$.

Proposition. Soit $f, g : A \subset E \to \mathbb{K}$ deux fonctions numériques et $a \in \overline{A}$.

- Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} c$, alors $(f \times g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} b \times c$.

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $g : B \subset F \to G$ deux fonctions telles que $f(A) \subset B$. Soit $a \in \overline{A}$ et $b \in \overline{B}$.

- Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ et $g(x) \xrightarrow[x \to b]{} c$, alors $g \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} c$.

1.5 Limite par coordonnées, limite des fonctions à valeurs dans un espace produit

Définition. Soit F est un espace vectoriel de dimension finie p, muni d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$. Soit $g : A \subset E \to F$. À $x \in A$ fixé, $g(x)$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$g(x) = g_1(x)f_1 + g_2(x)f_2 + \cdots + g_p(x)f_p$$

où $(g_1(x), g_2(x), \dots, g_p(x))$ est le p-uplet des coordonnées de $g(x)$ dans la base $\mathcal{C}$.
Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, la fonction numérique g_k est la **k-ème application coordonnée** de g dans la base $\mathcal{C}$.

Théorème.

Avec les notations précédentes, et avec $\ell \in F$ dont les coordonnées sont $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p)$, on a :

$$g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \forall k \in \{1, \dots, p\},\ g_k(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_k$$

Remarque. *Ces dernières limites sont des limites dans $\mathbb{K}$.*

Proposition. Soit $g : A \subset E \to F$ où $F = F_1 \times \cdots \times F_p$. On peut écrire, pour tout $x \in A$:

$$g(x) = \big(g_1(x), \ldots, g_p(x)\big)$$

où les fonctions g_k sont les applications composantes de g.
Pour $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p) \in F$, on a :

$$g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \forall k \in \{1, \ldots, p\},\ g_k(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_k$$

Remarque. *Ces dernières limites sont des limites dans les espaces F_k.*

2 Continuité

2.1 Définition

Définition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $a \in A$. On dit que f est **continue en** a lorsque :

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$$

On dit que f est continue sur A lorsque f est continue en tout point de A.

Remarque. *La continuité en un point est une propriété locale.*

2.2 Caractérisation séquentielle

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $a \in A$. f est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

2.3 Opérations sur les fonctions continues

Proposition. Soit $f, g : A \subset E \to F$ deux fonctions, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ deux scalaires et $\varphi : A \subset E \to \mathbb{K}$ une fonction numérique.

- Si f et g sont continues en $a \in A$ (resp. sur A), alors $\lambda f + \mu g$ est continue en a (resp. sur A).
- Si f et φ sont continues en $a \in A$ (resp. sur A), alors $\varphi f : x \mapsto \varphi(x) f(x)$ est continue en a (resp. sur A).

Proposition. Soit $f, g : A \subset E \to K$ deux fonctions numériques.

- Si f et g sont continues en $a \in A$ (resp. sur A), alors $f \times g : x \mapsto f(x)g(x)$ est continue en a (resp. sur A).

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $g : B \subset F \to G$ deux fonctions telles que $f(A) \subset B$.

- Si f est continue en $a \in A$ (resp. sur A) et g est continue en $f(A)$ (resp. sur $f(A)$), alors $g \circ f$ est continue en a (resp. sur A).

2.4 Continuité par coordonnées, continuité des fonctions à valeurs dans un espace produit

Définition. Soit F est un espace vectoriel de dimension finie p, muni d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$. Soit $g : A \subset E \to F$. À $x \in A$ fixé, $g(x)$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$g(x) = g_1(x)f_1 + g_2(x)f_2 + \cdots + g_p(x)f_p$$

où $(g_1(x), g_2(x), \dots, g_p(x))$ est le p-uplet des coordonnées de $g(x)$ dans la base $\mathcal{C}$.
Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, la fonction numérique g_k est la **k-ème application coordonnée** de g dans la base $\mathcal{C}$.

Théorème.

Avec les notations précédentes, g est continue en $a \in A$ si et seulement si les p applications coordonnées g_k sont continues en a.

Proposition. Soit $g : A \subset E \to F$ où $F = F_1 \times \cdots \times F_p$. On peut écrire, pour tout $x \in A$:

$$g(x) = \big(g_1(x), \dots, g_p(x)\big)$$

où les fonctions g_k sont les applications composantes de g.
La fonction g est continue en $a \in A$ si et seulement si les p applications composantes g_k sont continues en a.

2.6 Fonctions lipschitziennes, uniformément continues

Définition. La fonction $f : A \subset E \to F$ est **lipschitzienne** sur A si et seulement s'il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in A,\ \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant k\|y - x\|_E$$

Proposition. Soit $A \subset E$, avec $A \neq \varnothing$. Alors l'application : $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(x, A) \end{array}$ est 1-lipschitzienne.

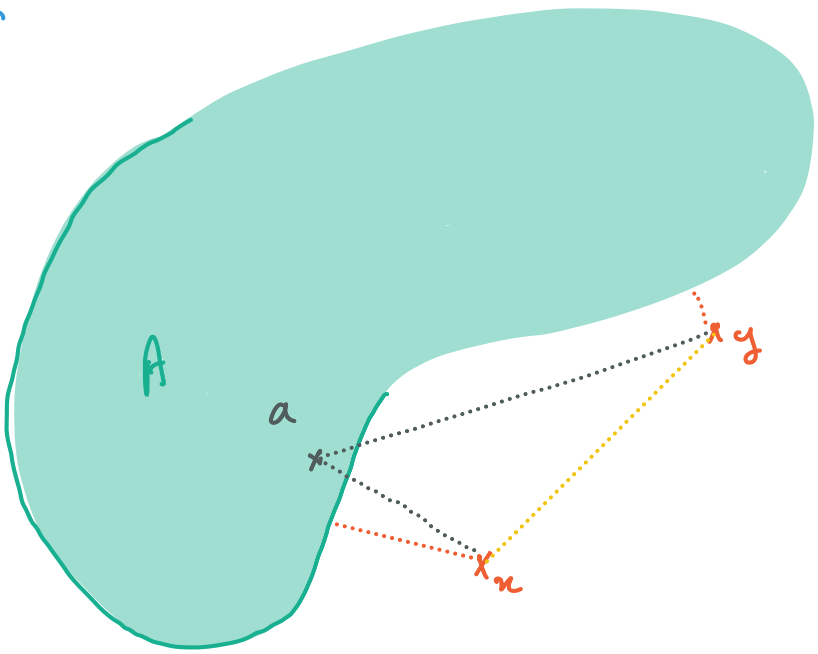
Définition. La fonction $f : A \subset E \to F$ est **uniformément continue** sur A si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in A,\ \|y - x\|_E \leqslant \eta \implies \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant \varepsilon$$

Proposition.

- Les applications lipschitziennes sont uniformément continues.
- Les applications uniformément continues sont continues.

Preuve:



Soit $x, y \in E$ Mque $|d(x,A) - d(y,A)| \leq \|x-y\|$

- Mque $d(x,A) \leq \|x-y\| + d(y,A)$

$\forall a \in A$

$$d(x,A) \leq \|x-a\|$$

$$= \|x-y+y-a\|$$

$$\leq \|x-y\| + \|y-a\|$$

Ainsi $\forall a \in A$, $\|y-a\| \geq \underbrace{d(x,A) - \|x-y\|}_{\text{indép de } a}$

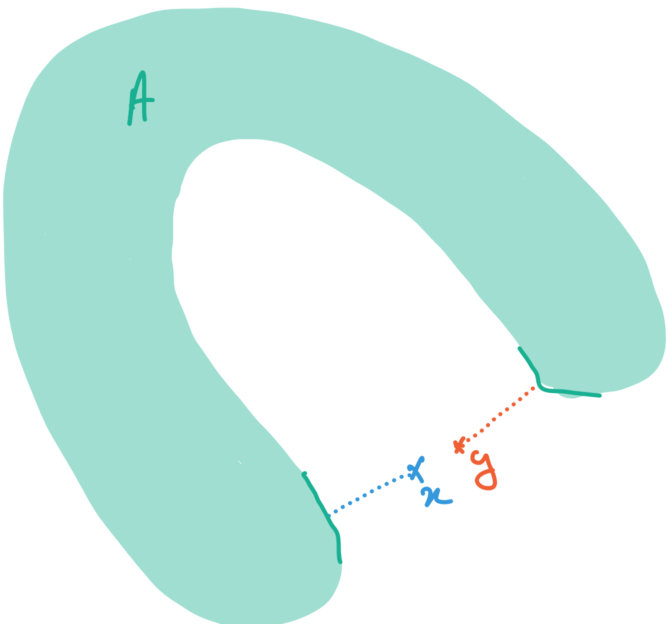
donc $\inf_{a\in A} \|y-a\| \geq d(x,A) - \|x-y\|$

ie $d(y,A) \geq d(x,A) - \|x-y\|$

Bref : $\underline{d(x,A) - d(y,A) \leq \|x-y\|}$

• De façon symétrique $d(y,A) - d(x,A) \leq \|x-y\|$

et donc $\underline{|d(x,A) - d(y,A)| \leq \|x-y\|}$



2.5 Continuité et densité

Théorème.

Soit $f, g : A \subset E \to F$ deux applications. Si :

- f et g sont continues sur A,
- $\forall x \in D \subset A,\ f(x) = g(x)$,
- D est dense dans A,

alors :

- $f = g$ i.e. $\forall x \in A,\ f(x) = g(x)$.

Remarque. *Ainsi, pour montrer une propriété « continue » sur un ensemble, il suffit de la montrer sur une partie dense de cet ensemble.*

Preuve: Soit $x \in A$.

Comme D dense dans A, donc $\exists (u_n)_n$ d'éléments de D

tq $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

Or $u_n \in D$ donc $f(u_n) = g(u_n)$

$$\begin{array}{ccc} f(u_n) & = & g(u_n) \\ \big\downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} & & \big\downarrow \\ f(x) & & g(x) \end{array}$$

par continuité de f, g en x.

Donc $f(x) = g(x)$.

3 Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé, par une application continue

Théorème.

Soit $f\ :\ A \subset E \to F$ une application continue. Alors l'image réciproque par f d'un ouvert (resp. fermé) est un ouvert (resp. fermé) relatif de A :

- Si X est ouvert, $f^{-1}(X)$ est un ouvert de A
- Si X est fermé, $f^{-1}(X)$ est un fermé de A

Proposition. Soit f et g deux fonctions continues sur A, à valeurs réelles. Alors, pour tout réel λ :

$$\{x \in A,\ f(x) = g(x)\} \text{ et } \{x \in A,\ f(x) = \lambda\} \text{ sont des fermés de } A$$
$$\{x \in A,\ f(x) \leqslant g(x)\} \text{ et } \{x \in A,\ f(x) \leqslant \lambda\} \text{ sont des fermés de } A$$
$$\{x \in A,\ f(x) < g(x)\} \text{ et } \{x \in A,\ f(x) < \lambda\} \text{ sont des ouverts de } A$$

Remarque chouette !

$E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2 + 2y^2 = 1 \}$

est un fermé de $\mathbb{R}^2$

car $E = f^{-1}(\{1\})$ où $f : (x,y) \mapsto x^2 + 2y^2$

continue, $\{1\}$ fermé.

Preuve :

- Soit X un fermé de F

Mq $f^{-1}(X)$ est un fermé de A

Par caract. séquentielle.

Soit $(x_n)_n$ suite d'éléments de $f^{-1}(X)$

qui converge dans A vers l.

$\forall n \in \mathbb{N},\quad f(x_n) \in X$

$$f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(l)$$ par continuité de f en l.

or X est fermé donc $f(\ell) \in X$

i.e. $\ell \in f^{-1}(X)$

<u>Ccl</u> : $f^{-1}(X)$ est un fermé de A.

- Soit X ouvert de F i.e. X^c fermé de F.

$$x \in f^{-1}(X) \iff f(x) \in X$$
$$\iff f(x) \notin X^c$$
$$\iff x \notin f^{-1}(X^c)$$
$$\iff x \in \left(f^{-1}(X^c)\right)^c$$

<u>Ainsi</u> $f^{-1}(X) = \left(f^{-1}(X^c)\right)^c$

or X^c fermé donc $f^{-1}(X^c)$ fermé

donc $f^{-1}(X)$ ouvert

(on parle ici de complémentaires dans F ou dans A

de fermé relatif dans A, d'ouvert relatif dans A)

<u>Utilisation</u> f, g continues : $E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$B = \{x \in E \text{ tq } f(x) < g(x)\}$$
$$= h^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$$

où $h : x \longmapsto g(x) - f(x)$ continue

$\mathbb{R}_+^*$ ouvert de $\mathbb{R}$

donc B ouvert de E.