Pour jè
310.23
310.24
310.28

Théorème de Pythagore.

x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Cas d'une famille finie de vecteurs. Si $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille orthogonale, alors $\left\| \sum_{i=1}^{p} v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2$.

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} v_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{p} v_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{p} v_j \right\rangle \quad \text{) bilinéarité}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \langle v_i \mid v_j \rangle$$

0 pour $i \neq j$

$$= \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2$$

2.2 Sous-espaces orthogonaux

Définition. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont **orthogonaux** si et seulement si :

$$\forall x \in F,\ \forall y \in G,\ x \perp y$$

On note $F \perp G$.

Proposition. Lorsque $F \perp G$, la somme $F + G$ est directe, et on la note $F \overset{\perp}{\oplus} G$.

Proposition. Si $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une famille de sous-espaces deux à deux orthogonaux, alors leur somme est directe et on la note $\overset{\perp}{\bigoplus_{i=1}^{p}} F_i$.

Remarque:

$F \oplus G$ désigne le sous-ev $F+G$
et apporte l'info supplémentaire : la somme est directe

$F \overset{\perp}{\oplus} G = F \overset{\perp}{\oplus} G$ désigne le sous-ev $F+G$
et apporte l'info supplémentaire : $F \perp G$
F, G sont en somme directe

Preuve: On suppose $F \perp G$

Mq F, G sont en somme directe.

Soit $x \in F \cap G$

Alors $\underset{\underset{F}{\Uparrow}}{x} \perp \underset{\underset{G}{\Uparrow}}{x}$ donc $\langle x | x \rangle = 0$ ie $x = 0$

Preuve: On suppose les F_i 2 à 2 orthogonaux.

Mque ils sont en somme directe

Soit $x_1 \in F_1, \dots, x_p \in F_p$ tq $x_1 + \dots + x_p = 0$

donc

$\forall k \quad 0 = \langle x_k , 0 \rangle$

$$= \langle x_k , \sum_{i=1}^{p} x_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \langle x_k | x_i \rangle$$

nul pour $i \neq k$

$$= \| x_k \|^2$$

donc $x_k = 0$

Ainsi $(F_1 \dots F_p)$ sont en somme directe.

On note $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ cette somme

2.3 Sous-espace orthogonal d'une partie

Définition. Soit A une partie de E. On appelle **orthogonal de** A l'ensemble :

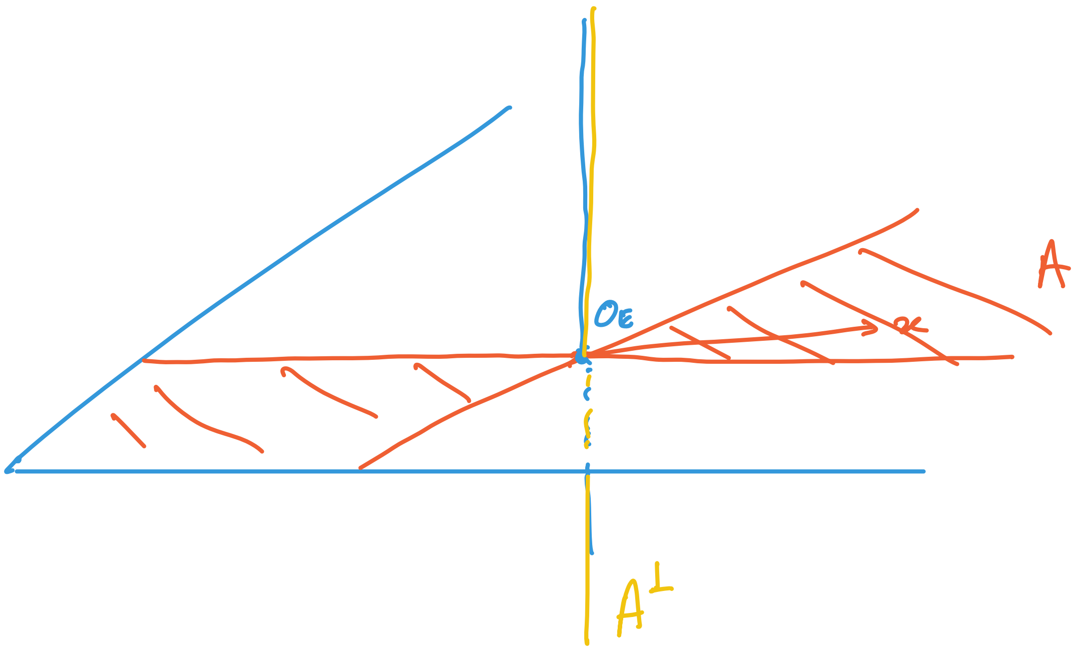
$$A^\perp = \{x \in E \text{ t.q. } \forall a \in A,\ x \perp a\}$$

Exemple. $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

Proposition. Soit A une partie de E espace préhilbertien.

- $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E
- Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$
- $A \perp B$ signifie que $A \subset B^\perp$ et $B \subset A^\perp$.

Remarque. *Pour la dernière propriété, penser à deux droites dans l'espace usuel de dimension* 3.



Preuve : • Mq que $A^\perp$ est un sous-ev de E

* $A^\perp \subset E$, $0_E \in A^\perp$ donc $A^\perp \neq \emptyset$

* Stabilité par CL :

Soit $x, y \in A^\perp$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Mq que $\lambda x + \mu y \in A^\perp$

$\forall a \in A$, $\langle \lambda x + \mu y, a \rangle$

$= \lambda \langle x, a \rangle + \mu \langle y, a \rangle$

$= \lambda . 0 + \mu . 0$

car $x \in A^\perp$, $a \in A$
$y \in A^\perp$

$= 0$

donc $\lambda x + \mu y \in A^\perp$

- M2

$$A^\perp = \bigcap_{a \in A} \mathrm{Ker}(\langle \cdot , a \rangle)$$

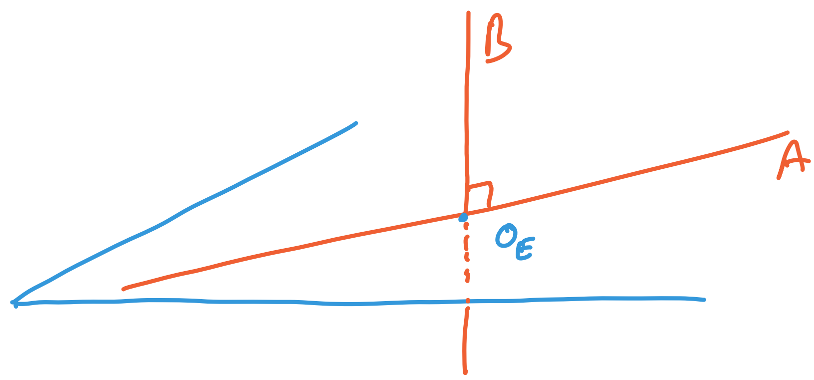
où $\langle \cdot , a \rangle : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle x, a \rangle \end{array}$ forme linéaire

- Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$

immédiat avec l'égalité précédente.

- Écrire $A \perp B$, ce n'est pas écrire $A = B^\perp$ ou $B = A^\perp$

mais c'est écrire $A \subset B^\perp$ et $B \subset A^\perp$



2.4 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Proposition. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $F^\perp$ est orthogonal à F :

$$F \oplus^{\perp} F^\perp$$

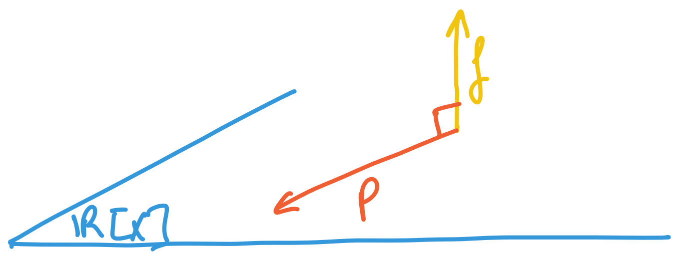
mais, en général, $F \oplus^{\perp} F^\perp \subsetneq E$.

Exemple. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, et F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales. Déterminer $F^\perp$.

Remarque. *On verra au § 4 que, lorsque F est de dimension finie (en particulier dans un espace euclidien), $F^\perp$ et F sont supplémentaires.*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$$

Analyse Soit $f \in F^\perp$ ie $\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 P(t) f(t)\, dt = 0$



Par le th de Weierstrass, il existe $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de $\mathbb{R}[X]$ tq $P_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} f$

ie $\|P_n - f\|_\infty^{[0,1]} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

On a donc :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \langle P_n | f \rangle = 0$

ie $\int_0^1 P_n(t) f(t) = 0$

$\big\downarrow n \to +\infty$

$\int_0^1 f(t) f(t)\, dt$?!

$$\left| \int_0^1 P_n(t) f(t)\,dt - \int_0^1 f^2(t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 |P_n(t) - f(t)|\,|f(t)|\,dt$$

$$\leq \|P_n - f\|_\infty^{[0,1]} \underbrace{\int_0^1 |f(t)|\,dt}_{\text{cte}}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

<u>Donc</u> $\int_0^1 f^2(t)\,dt = 0$

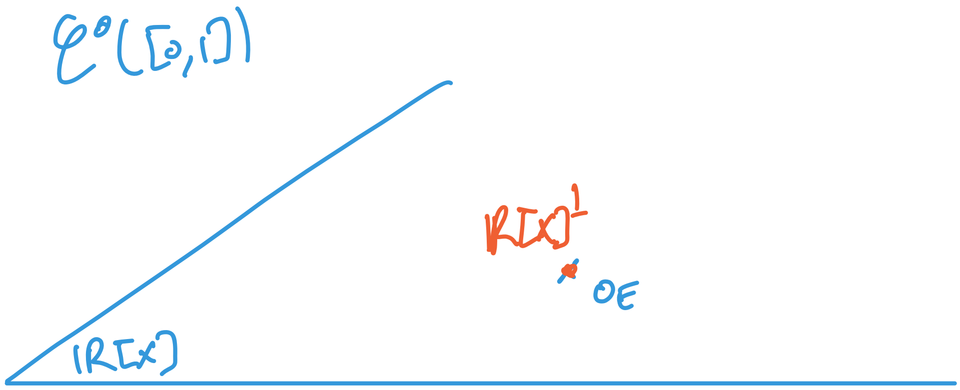
ie $\|f\|_2^2 = 0$

donc $f = 0$

<u>Bref</u> : Analyse : Si $f \in F^\perp$, alors $f = 0$ $\quad F^\perp \subset \{0_E\}$

Synthèse [...]

<u>Conclusion</u> : $F^\perp = \{0_E\}$



On a : $\mathbb{R}[X] \oplus \mathbb{R}[X]^\perp = \mathbb{R}[X] \subsetneq \mathcal{C}^0([0,1])$

3 Bases orthonormées d'un espace euclidien

Dans cette section, E est un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

3.1 Existence de bases orthonormées

Définition. On appelle **base orthonormée** de E toute base de E qui soit aussi une famille orthonormée.

Proposition. Toute famille orthonormée de n vecteurs, lorsque $n = \dim E$, est une base orthonormée.

Théorème.

Tout espace euclidien admet au moins une base orthonormée.

Remarque. *On verra au § 4.4 un algorithme de construction d'une telle base.*

Exemple. Avec le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la famille :

$$\left((E_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij}+E_{ji})\right)_{1\leqslant i<j\leqslant n}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij}-E_{ji})\right)_{1\leqslant i<j\leqslant n}\right)$$

est une base orthonormée.

Preuve: par récurrence sur la dimension de l'espace

- $\{0_E\}$ admet $()$ comme base, qui est orthonormée
- Si $E = \mathrm{Vect}(x)$ de dim 1, $x \neq 0$

  Alors: $\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)$ est une base orthonormée de E

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que tout espace de dim n admet une base orthonormée.

  Soit E espace de dimension $n+1$.

  Soit $x \in E$, $x \neq 0$

  On pose $e_{n+1} = \dfrac{x}{\|x\|}$

  On note $F = \mathrm{Vect}(e_{n+1})^\perp$

$= \ker(\langle \cdot, e_{n+1} \rangle)$

F est noyau d'une forme linéaire non nulle (vaut 1 en e_{n+1}) donc de dim n.

Par H.R à F, il existe $(e_1, .., e_n)$ base orthonormée de F.

<u>Mque</u> $(e_1, ..., e_n, e_{n+1})$ est orthonormée.

* les vecteurs sont unitaires
* $e_i \perp e_j \quad \forall i,j \leq n$ par HR
* $\langle e_i \mid e_{n+1} \rangle = 0 \quad \forall i \leq n$

car $e_i \in F = \{e_{n+1}\}^\perp$

C'est donc une famille orthonormée à $n+1$ élements donc base orthonormée de E.

<u>Remarque</u>: $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ euclidien

produit scalaire canonique $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$

$$= \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$$

$(E_{ij})_{ij}$ base canonique

$$
\begin{aligned}
\langle E_{ij}, E_{kl} \rangle &= tr\left(E_{ij}^T E_{kl}\right) \\
&= tr\left(E_{ji} E_{kl}\right) \\
&= tr\left(\delta_{ik} E_{jl}\right) \\
&= \delta_{ik} \underbrace{tr\left(E_{jl}\right)}_{\begin{cases} 0 \text{ si } j,l \notin diag \\ 1 \text{ si } j,l \in diag \end{cases}} \\
&= \delta_{ik} \cdot \delta_{jl} \\
&= \delta_{(i,j),(k,l)} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } (i,j) \neq (k,l) \\ 1 & \text{si } (i,j) = (k,l) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Bref la base canonique est orthonormée.

4.2 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E. On appelle **projection orthogonale sur** F, et on note p_F, la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque. *Rappelons que, par définition, $p_F(x)$ est l'unique vecteur y tel que :*

$$\begin{cases} y \in F \\ y - x \in F^\perp \end{cases}$$

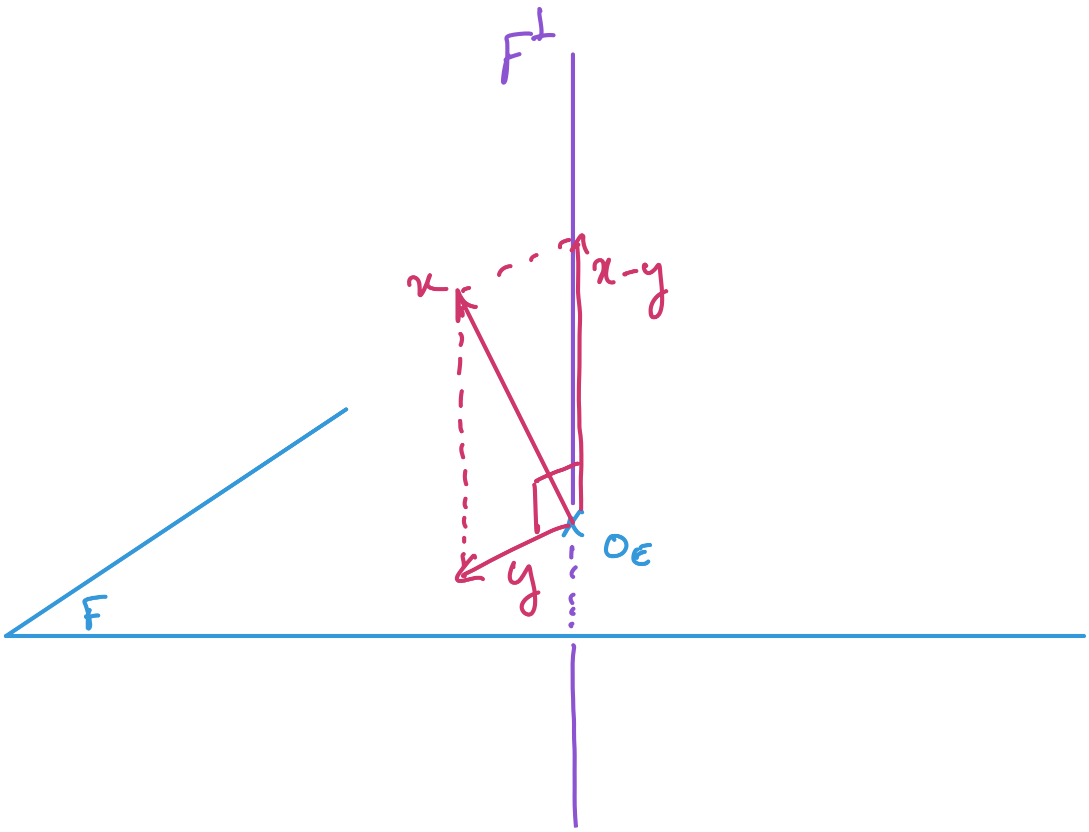
Ceci fournit une méthode de détermination de $p_F(x)$ par résolution d'un système linéaire lorsque l'on connaît une famille génératrice de F.

Remarque. *On a supposé F de dimension finie, mais si F est de dimension infinie et que $F \oplus F^\perp = E$, alors la projection orthogonale est bien définie.*

Théorème

Soit F sous-espace de dim finie d'un espace préhilbertien E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in E$ tq $\begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$

Def y s'appelle projeté orthogonal de x sur F.



Preuve:

F est de dim finie, donc admet une base orthonormée $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$

Analyse: on cherche y.

Soit y qui convient ie $y\in F$ et $x-y\in F^\perp$.

$\exists (y_1\dots y_p)$ coord de y dans $\mathcal{B}$:

$$y=\sum_{i=1}^{p} y_i e_i$$

$$\begin{aligned} \langle x|e_j\rangle &= \langle x-y+y\,|\,e_j\rangle \\ &= \langle x-y, e_j\rangle + \langle y|e_j\rangle \\ &= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } x-y\in F^\perp \\ \text{et } e_j\in F}}{0} + y_j \end{aligned}$$

Donc $y_j=\langle x|e_j\rangle \quad \forall j$

ie $y=\sum_{i=1}^{p}\langle x|e_i\rangle e_i$

Synthèse Vérifions que ce y convient :

- $y\in F$ car y CL de $(e_1\dots e_p)$
- $\langle x-y\,|\,e_j\rangle$

$$= \langle x | e_j' \rangle - \underbrace{\langle y | e_j' \rangle}$$

la coord de y dans la base orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$

$$= \langle x | e_j' \rangle - \langle x | e_j' \rangle$$

$$= 0$$

Corollaire Très utile !

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F,

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x | e_i \rangle e_i$$

Remarque. ce corollaire fournit une formule de projection orthogonale.
(et pas par résolution d'un système)

Corollaire

Si F sous-ev de dim finie de E préhilbertien,
Alors $F \oplus F^{\perp} = E$

En particulier si E euclidien de dim n

$$F \oplus F^{\perp} = E$$

et $\dim F^{\perp} = n - \dim F$

Preuve; <u>Mq $F \oplus F^{\perp} = E$</u>

- On sait que F et $F^{\perp}$ sont orthogonaux

$\boxed{\supset}$ • Soit $x \in E$

$$x = \underbrace{p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{[x - p_F(x)]}_{\in F^{\perp}}$$

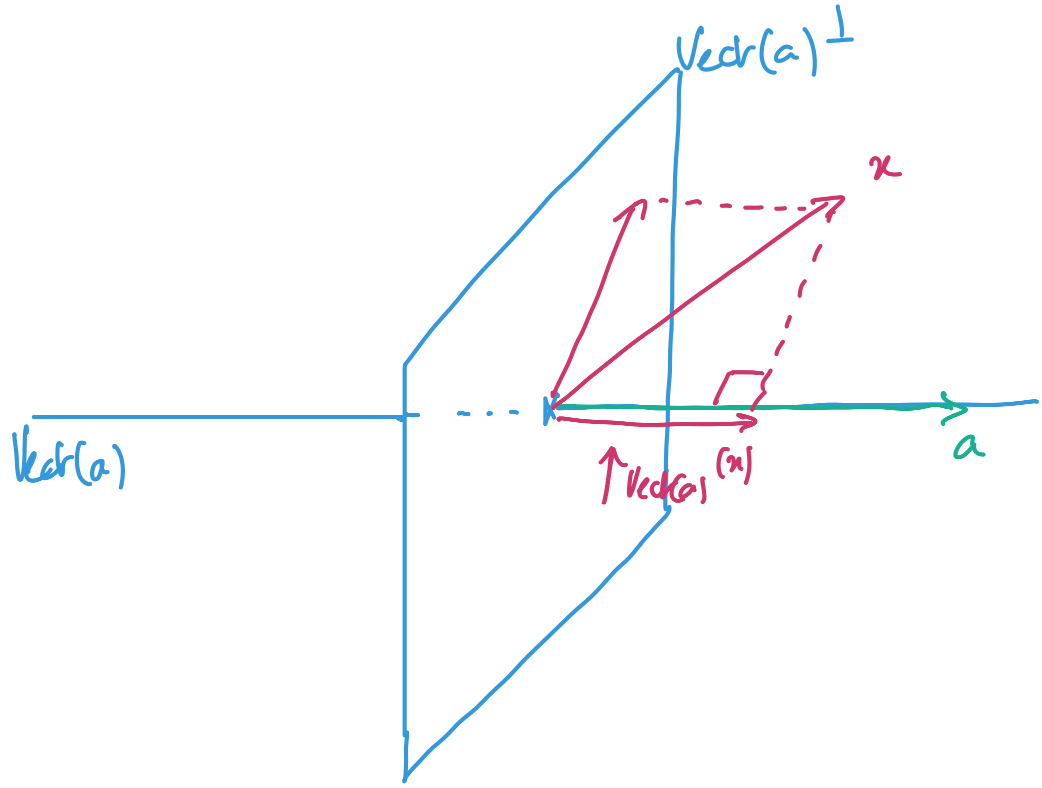
$$\in F + F^{\perp}$$

Proposition. Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F, alors :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, x \rangle e_i$$

Remarque. *Ceci fournit une seconde méthode de détermination de $p_F(x)$, lorsque l'on connaît une base orthonormée de F.*

Exemple. Soit $a \in E$ un vecteur non nul. Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(a)$, et celle sur $\mathrm{Vect}(a)^\perp$.



$\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$ est une base orthonormée de Vect(a)

donc $$p_{\mathrm{Vect}(a)}(x) = \left\langle x \,\middle|\, \frac{a}{\|a\|} \right\rangle \frac{a}{\|a\|}$$

$$= \frac{\langle x \mid a \rangle}{\|a\|^2} a$$

$$p_{\mathrm{Vect}(a)^\perp}(x) = x - p_{\mathrm{Vect}(a)}(x)$$

$$= x - \frac{\langle x \mid a \rangle}{\|a\|^2} a$$

$F \oplus G = E$

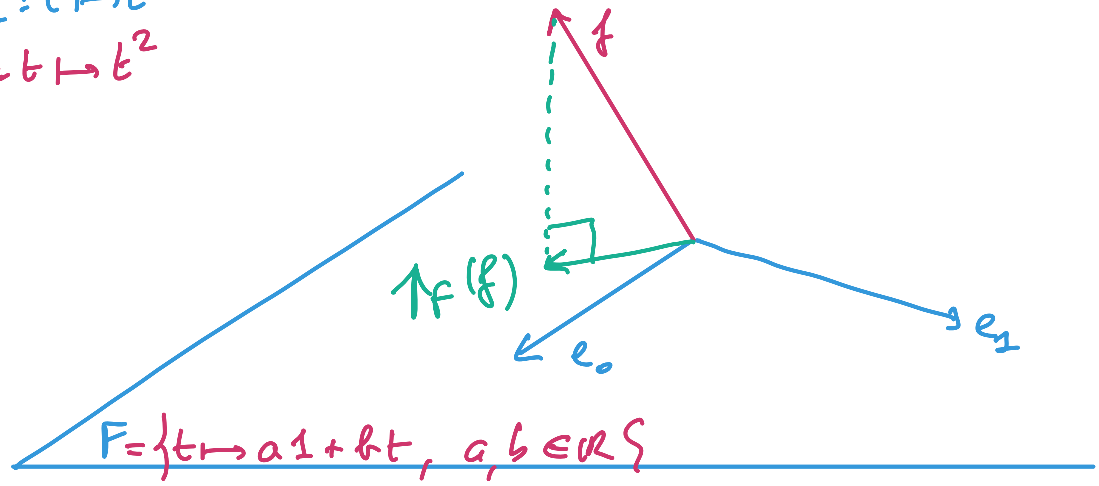
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

Exemple. Dans $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer le projeté orthogonal de $t \mapsto t^2$ sur $F = \mathrm{Vect}(t \mapsto 1, t \mapsto t)$.

$e_0 : t \mapsto 1$

$e_1 : t \mapsto t$

$f : t \mapsto t^2$



$$\|e_0\|^2 = \langle e_0, e_0\rangle = \int_0^1 1.1.\,dt = 1$$

$$\langle e_0, e_1\rangle = \int_0^1 1.\,t\,dt = \frac{1}{2}$$ Zut.

<u>M1</u> : on résout un système.

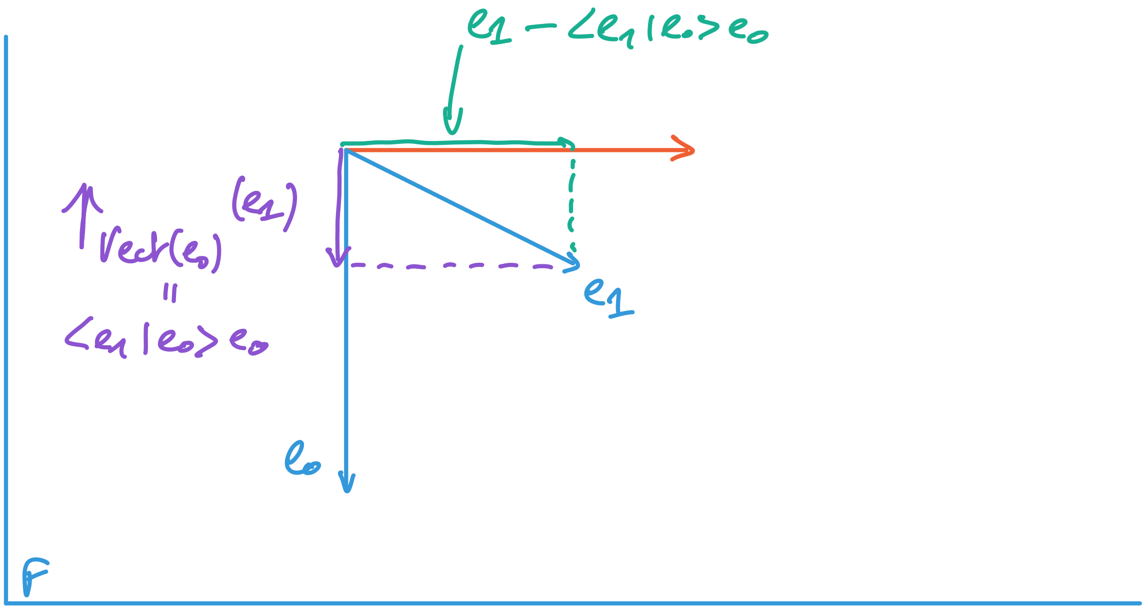
On cherche $g \in \mathcal{C}^0([0,1])$ tq $\begin{cases} g \in F \\ f-g \in F^\perp \end{cases}$

ie on cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} g = ae_0 + be_1 \\ f-g \perp e_0 \\ f-g \perp e_1 \end{cases}$

Système 2 inconnues a, b

2 equations $\begin{cases} \langle f-g | e_0\rangle = 0 \\ \langle f-g | e_1\rangle = 0 \end{cases}$

M2 on cherche d'abord une base orthonormée de F



Posons $e_1' = \dfrac{e_1 - \langle e_1 | e_0 \rangle e_0}{\| e_1 - \langle e_1 | e_0 \rangle e_0 \|}$ $\in F$, orthog à e_0
unitaire

donc (e_0, e_1') base orthonormée de F.

$$e_1' = \frac{e_1 - \frac{1}{2} e_0}{\| e_1 - \frac{1}{2} e_0 \|}$$

Calculons: $\| e_1 - \frac{1}{2} e_0 \|^2 = \displaystyle\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{4 - 6 + 3}{12}$$

$$= \frac{1}{12}$$

Donc $e_1' = 2\sqrt{3}\left(e_1 - \frac{1}{2}e_0\right)$

$$= t \longmapsto 2\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Comme (e_0, e_1') base orthonormée de F

$$p_F(f) = \langle f | e_0 \rangle e_0 + \langle f | e_1' \rangle e_1'$$

Calculons:

$$\langle f | e_0 \rangle = \int_0^1 t^2 . 1 \, dt = \frac{1}{3}$$

$$\langle f | e_1' \rangle = 2\sqrt{3} \int_0^1 t^2\left(t - \frac{1}{2}\right) dt$$

$$= 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)$$

$$= \sqrt{3} . \frac{1}{6}$$

Ainsi: $p_F(f) = \frac{1}{3} e_0 + \frac{1}{6}\sqrt{3} . e_1'$

$$= \left(t \longmapsto \frac{1}{3} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \left(t \mapsto t - \frac{1}{6}\right)$$

4.3 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $x \in E$. On appelle **distance de** x **à** F la quantité :

$$d(x, F) = \operatorname*{Inf}_{y \in F} \|x - y\|$$

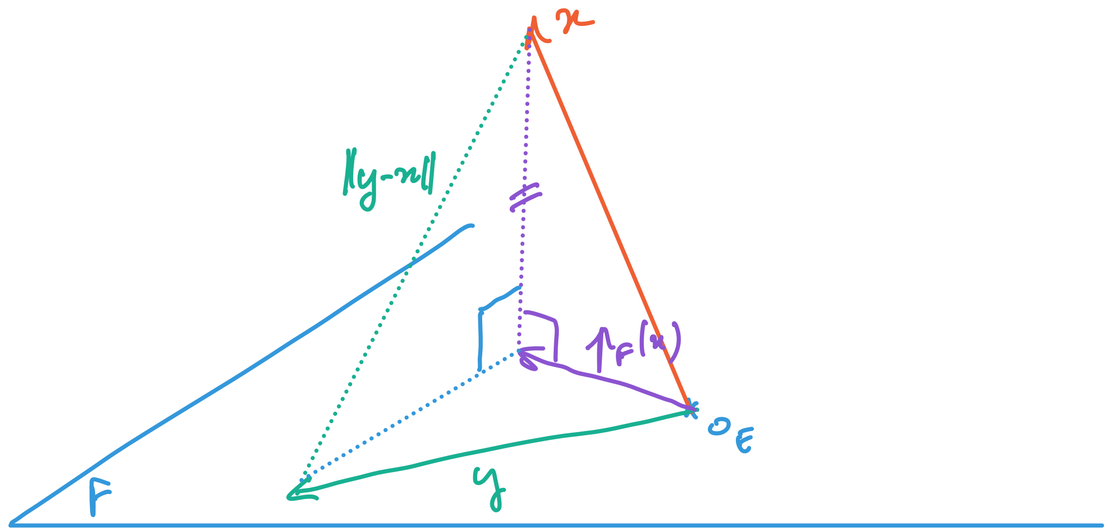
Théorème.

Si F est de dimension finie, alors le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur de F qui réalise la distance précédente :
C'est l'unique $y_0 \in F$ tel que :

$$\|x - y_0\| = \operatorname*{Min}_{y \in F} \|x - y\|$$

Ainsi :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}$$



Pour $y \in F$,

$y - p_F(x) \in F$

$x - p_F(x) \in F^\perp$

Donc, par le th de Pythagore

$$\|y-x\|^2 = \|y - p_F(x) - (x - p_F(x))\|^2 = \|y - p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$$

donc $\|y-x\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2$ avec égalité ainsi $\|y - p_F(x)\| = 0$

i.e. $y = p_F(x)$

Bref : $d(x, F) = \| x - p_F(x) \|$

Exemple. Justifier l'existence et déterminer :

$$\operatorname*{Inf}_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \, \mathrm{d}t$$

On note $F = \{ t \mapsto at + b \text{ pour } a, b \in \mathbb{R} \}$

$= \mathrm{Vect}(e_1, e_0)$

$E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) \, dt$

E est préhilbertien.

On cherche $\operatorname*{Inf}_{g \in F} \int_0^1 (t^2 - g(t))^2 \, dt$

$= \operatorname*{Inf}_{g \in F} \| e_2 - g \|^2$

où $e_2 = (t \mapsto t^2)$

$= d(e_2, F)^2$

par le théorème précédent, c'est

$$= \| e_2 - p_F(e_2) \|^2$$

$$= \int_0^1 \left(t^2 - \left(t - \frac{1}{6}\right)\right)^2 dt$$

$$= \int_0^1 t^4 + t^2 + \frac{1}{36} - 2t^3 + \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{3}t \, dt$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6}$$

$$= \dots$$