Pour me : 310.12, 310.22

Espaces préhilbertiens réels

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1 Produit scalaire et norme associée

1.1 Produit scalaire

$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

Définition. On appelle **produit scalaire** sur E une forme bilinéaire, symétrique, positive et définie-positive sur E, c'est-à-dire, en notant φ cette application :

• $\varphi(x)$ existe

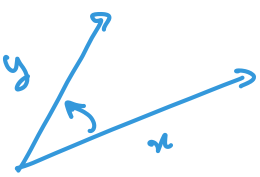
- φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- φ est linéaire par rapport à chacune de ses deux variables ;
- $\forall x, y \in E,\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;
- $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) \geqslant 0$;
- $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$.

Remarque. *La symétrie et la linéarité par rapport à l'une des variables suffit à justifier la bilinéarité.*

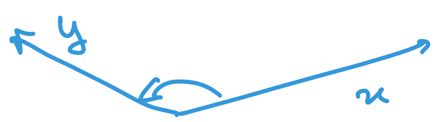
Notation. On note en général $\langle x, y\rangle$, $(x|y)$ ou $x \cdot y$ le produit scalaire de x avec y.

Définition. Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire, s'appelle un **espace préhilbertien**. S'il est en plus de dimension finie, on dit que c'est un **espace euclidien**.

Rmq : $\varphi(x, y)$ peut être négatif.



$\langle x, y\rangle > 0$



$\langle x, y\rangle < 0$

1.2 Exemples de référence

Remarque. *Les exemples de cette section figurent explicitement au programme, et peuvent donc être utilisés directement.*

Définition. Sur $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Définition. Sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par :

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\langle X, Y\rangle = X^\top Y$$

Remarque. *Il coïncide avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, via l'identification usuelle entre une matrice colonne et un n-uplet.*
On trouve parfois la définition $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(X^\top Y)$. En effet, on a $X^\top Y \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. La trace permet ici d'en faire un réel plutôt qu'une matrice 1×1. On accepte cependant souvent de confondre $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

$$\langle X, Y\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Définition. Sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B)$$

Si $A = (a_{ij})_{ij}$ et $B = (b_{ij})_{ij}$, on a de plus l'expression :

$$\langle A, B\rangle = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij}b_{ij}$$

Il s'agit donc de la somme des produits terme à terme des deux matrices.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\langle A, B\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \cdots \qquad \cdots + a_{nn}b_{nn}$$

Preuve:

- On note $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ $\qquad B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$

$$A^\top = (a'_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}} \quad \text{où} \quad a'_{ij} = a_{ji} \qquad [A^\top]_{ij}$$

$$[A^\top B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a'_{ik} b_{kj} \qquad \forall i \in \{1 \dots p\} \quad \forall j \in \{1 \dots p\}$$

$$\operatorname{tr}(A^\top B) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a'_{ik} b_{ki} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ki}$$

indices muets.

$$= \sum_{\substack{i\in\{1 \dots n\}\\ j\in\{1 \dots p\}}} a_{ij} b_{ij}$$

Mq c'est un produit scalaire.

M1

- $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ "forme"

- $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda A + \mu B, C \rangle = tr\left((\lambda A + \mu B)^T C \right)$$
$$= tr\left((\lambda A^T + \mu B^T) C \right)$$
$$= tr\left(\lambda A^T C + \mu B^T C \right)$$
$$= \lambda \, tr(A^T C) + \mu \, tr(B^T C)$$
$$= \lambda \langle A, C \rangle + \mu \langle B, C \rangle$$

donc $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable.

- De même $\forall A, B, C, \lambda, \mu$

$$\langle A, \lambda B + \mu C \rangle = \lambda \langle A, B \rangle + \mu \langle A, C \rangle$$

Donc $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est bilinéaire

- $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

$$\langle B, A \rangle = tr(B^T A)$$
$$= tr\left((B^T A)^T \right)$$
$$= tr(A^T B)$$
$$= \langle A, B \rangle$$

donc $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est symétrique

M2 : On peut aussi montrer :

- $\langle \cdot , \cdot \rangle$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

- $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle \quad \forall A, B$
- $\langle \lambda A + \mu B, C\rangle = \lambda \langle A, C\rangle + \mu \langle B, C\rangle$

donc linéaire par rapport à la 2nde variable.

Remarque : la symétrie se "voit" dans la formule

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$$

M3 : $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire

par linéarité de la transposée

par bilinéarité du produit matriciel

parce que tr est une forme linéaire

Suite de la preuve

À toujours rédiger

Mq positive et définie positive

- Pour $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

$$\langle A, A\rangle = \sum_{i,j} a_{ij}^2$$
$$\geq 0$$

- Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ tq $\langle A, A \rangle = 0$

ie $\sum_{i,j} a_{ij}^2 = 0$

Somme nulle de termes ≥ 0

donc $\forall i,j \quad a_{ij} = 0$

Remarque: Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (hors programme)

on définit $\langle A, B \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} \overline{b_{ij}}$

$$= \mathrm{tr}(A^T \overline{B})$$

$$\langle A, A \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} \overline{a_{ij}}$$

$$= \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$$

$$\geq 0$$

Rmq: $\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot b_{ij}$

produit scalaire canonique en identifiant

$\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{np}$

$(x_1, \dots, x_n)$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{np})$

Définition. Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1.3 Autres exemples

Remarque. *Même s'ils sont très classiques, les exemples de cette section ne figurent pas explicitement au programme.*

Exemple. En confondant polynôme et fonction polynomiale associée, $\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple. Toujours sur $\mathbb{R}[X]$, montrer que

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire.

- $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$

  et au voisinage de $t \to +\infty$

  $$P(t)\,Q(t)\,e^{-t} = o(e^{t/2})\,e^{-t} \quad \text{car } P, Q \text{ polynômes}$$
  $$= o(e^{-t/2}) \quad \text{intégrable en } +\infty$$

  Donc $<.\,,.>$ existe

- $<.\,,.>$ est une forme bilinéaire symétrique

  par linéarité de l'intégrale, la bilinéarité du produit et la commutativité du produit.

- positivité :

  $$<P, P> = \int_0^{+\infty} P^2(t)\,e^{-t}\,dt$$
  $$\geq 0 \quad \text{car } \forall t \ P^2(t)e^{-t} \geq 0$$

- Défini-positif :

  Soit P tq $<P, P> = 0$

ie $\displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t)\, e^{-t}\, dt = 0$

intégrale nulle d'une fct continue positive

donc $\forall t \in [0, +\infty[\quad P^2(t)\, e^{-t} = 0$

donc $P(t) = 0$

Donc P a une infinité de racines

donc $P = 0$.

Exemple. Soit w une fonction continue, à valeurs strictement positives sur un intervalle I. On note :

$$E = \{f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \text{ t.q. } f^2 w \text{ intégrable sur } I\}$$

C'est un espace vectoriel, que l'on peut munir d'un produit scalaire en posant :

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t) g(t) w(t) \, \mathrm{d}t$$

1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

> Pour tout $x, y \in E$, on a :
> $$|\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$$
> L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.

Remarque. *On notera $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ la norme associée au produit scalaire. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'interprète bien géométriquement.*

Inégalité de Minkowski. Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens (on dit parfois *positivement liés*).

Remarque. *Avec $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, l'inégalité de Minkowski n'est rien d'autre que l'inégalité triangulaire sur la norme euclidienne.*

Preuve : à savoir faire

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \langle tx+y, tx+y\rangle \geq 0$

$\underbrace{\langle tx+y, tx+y\rangle}_{\text{polynôme en } t \text{ de deg} \leq 2}$

[...]

Preuve Minkowski $\quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

On note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| \quad \text{Cauchy-Schwarz} \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

par positivité

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

1.5 Norme euclidienne

Définition. On appelle **norme euclidienne** associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application :

$$\| \cdot \| \,:\, x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Proposition. C'est une norme.

Preuve :

- pour $x \in E$, $\langle x, x \rangle \geq 0$ donc $\|x\|$ existe
- pour $x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$
- Soit $x \in E$ tq $\|x\| = 0$ ie $\langle x, x \rangle = 0$

  donc $x = 0$ car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini-positif
- Soit $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} \\ &= |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ &= |\lambda| \, \|x\| \end{aligned}$$

- Inég triangulaire = Inég de Minkowski

Définition. Un vecteur de norme 1 est qualifié d'**unitaire**.

Proposition. Si E est muni de sa norme euclidienne, le produit scalaire est continu sur $E \times E$.

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f : E \longrightarrow F$$

f est continue en x_0

si x s'approche de x_0, $f(x)$ s'approche de $f(x_0)$

ie $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$

ie $\| f(x) - f(x_0) \| \xrightarrow[\|x - x_0\| \to 0]{} 0$

* $\mathbb{R}$ muni de la val. absolue

* $E \times E$ muni de la norme produit associé à la norme euclidienne.

Pour $(x,y) \in E$

$$\|(x,y)\|_{E\times E} = \operatorname{Max} \left(\|x\|_E , \|y\|_E \right)$$

On note $\|(x,y)\|_\infty = \operatorname{Max} \left(\|x\|_2 , \|y\|_2 \right)$

Montrons la continuité :

Soit $(x_0, y_0) \in E \times E$

$(x,y) \in E \times E$

On suppose $(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0)$

ie $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_\infty \longrightarrow 0$

ie $\begin{cases} \|x-x_0\|_2 \longrightarrow 0 \\ \|y-y_0\|_2 \longrightarrow 0 \end{cases}$

$$\left|\langle x,y\rangle - \langle x_0,y_0\rangle\right|$$

$$= \left|\langle x,y\rangle - \langle x_0,y\rangle + \langle x_0,y\rangle - \langle x_0,y_0\rangle\right|$$

$$\leq \left|\langle x,y\rangle - \langle x_0,y\rangle\right| + \left|\langle x_0,y\rangle - \langle x_0,y_0\rangle\right|$$

$$= \left|\langle x-x_0,\ y\rangle\right| + \left|\langle x_0,\ y-y_0\rangle\right|$$

$$\leq \|x-x_0\|_2\ \|y\|_2 + \|x_0\|_2\ \|y-y_0\|_2$$

par Cauchy-Schwarz

$$\leq \|x-x_0\|_2\ \|y-y_0+y_0\|_2 + \|x_0\|_2\ \|y-y_0\|_2$$

$$\leq \|x-x_0\|_2\ \|y-y_0\|_2$$

$$+ \|x-x_0\|_2\ \|y_0\|_2$$

$$+ \|x_0\|_2\ \|y-y_0\|_2$$

$$\xrightarrow[\substack{\|x-x_0\|_2 \to 0 \\ \|y-y_0\|_2 \to 0}]{} 0$$

1.6 Identités remarquables

Proposition. On a les identités remarquables suivantes :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \qquad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$$

les identités de polarisation :

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \qquad \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

et l'identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$$

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition. Deux vecteurs x et y sont dits **orthogonaux** si et seulement si :

$$\langle x, y \rangle = 0$$

On note dans ce cas : $x \perp y$.

Remarque. *Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de E, et un vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E est nul.*

Définition. Une famille $(v_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite **orthogonale** si et seulement si :

$$\forall i, j \in I,\ i \neq j \implies \langle v_i, v_j \rangle = 0$$

Elle est dite **orthonormée** si et seulement si :

$$\forall i, j \in I,\ \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Ha Ha!

Comment montrer que $x = 0$?

M1 $x = \dots$

$= \dots$

$= 0$

M2 $\forall y \in E,\quad \langle x, y \rangle = \dots$

$= \dots$

$= 0$

donc $x = 0$

Proposition. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
Toute famille orthonormée est libre.

Preuve: Soit $(x_i)_{i\in I}$ famille orthogonale de vecteurs non nuls.

La liberté de $(x_i)_{i\in I}$ est la liberté de toutes les sous-familles finies.

Soit $i_1, .., i_n \in I$

$\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{x_{i_k}} = \vec{0}$

$$0 = \langle x_{i_j} \mid \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k} \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\langle x_{i_j} \mid x_{i_k} \rangle}_{\text{nul pour } i_j \neq i_k}$$

$$= \lambda_j \underbrace{\| x_{i_j} \|^2}_{\neq 0 \text{ car } x_{i_j} \neq 0}$$

donc $\lambda_j = 0 \quad \forall j$

Exemple. Les polynômes élémentaires de Lagrange forment une famille libre.

Soit $a_0 \dots a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts

On définit

$$L_j(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{X - a_i}{a_j - a_i}$$

$(L_j)_{0 \leq j \leq n}$ base de $\mathbb{R}_n[X]$

$$\boxed{L_j(a_k) = \delta_{jk}}$$

Mque $(L_j)_j$ base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$

pour le produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)\, Q(a_k)$$

- C'est bien un produit scalaire

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique

par linéarité de l'évaluation polynomiale,

par bilinéarité et commutativité du produit.

$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 \geq 0$$

Soit P tq $\langle P, P \rangle = 0$ ie $\sum_{k=0}^{n} P^2(a_k) = 0$

Somme nulle de termes positifs donc

$\forall k \quad P(a_k)$

Donc P a $(n+1)$ racines donc $P = 0$.

- <u>Rque $(L_j)_j$ orthonormée</u>

$$\langle L_i \mid L_j \rangle = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k) L_j(a_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\delta_{ik} \delta_{kj}}_{\text{nul si } i \neq j}$$

1 si $i = j = k$

0 sinon

$$= \delta_{ij}$$

Donc $(L_j)_j$ orthonormée à $(n+1)$ vecteurs

donc base orthonormée de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

3.3 Coordonnées dans une base orthonormée

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, et x un vecteur de E. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont : $\begin{pmatrix} \langle e_1, x\rangle \\ \vdots \\ \langle e_n, x\rangle \end{pmatrix}$, c'est-à-dire :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle e_i$$

Remarque. *Si la base n'est qu'orthogonale, il faut adapter la formule en normant les vecteurs.*

Si la base n'est pas orthonormée, il n'y a pas d'expression simple des coordonnées à l'aide du produit scalaire.

Rmq : Dans une base qcq, obtenir les coord c'est résoudre un système (coûteux)

Ici, c'est un simple calcul de produit scalaire

Preuve :

Soit $x \in E$. On note $(x_1, \ldots, x_n)$ ses coord dans la base $\mathcal{B}$ ie $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

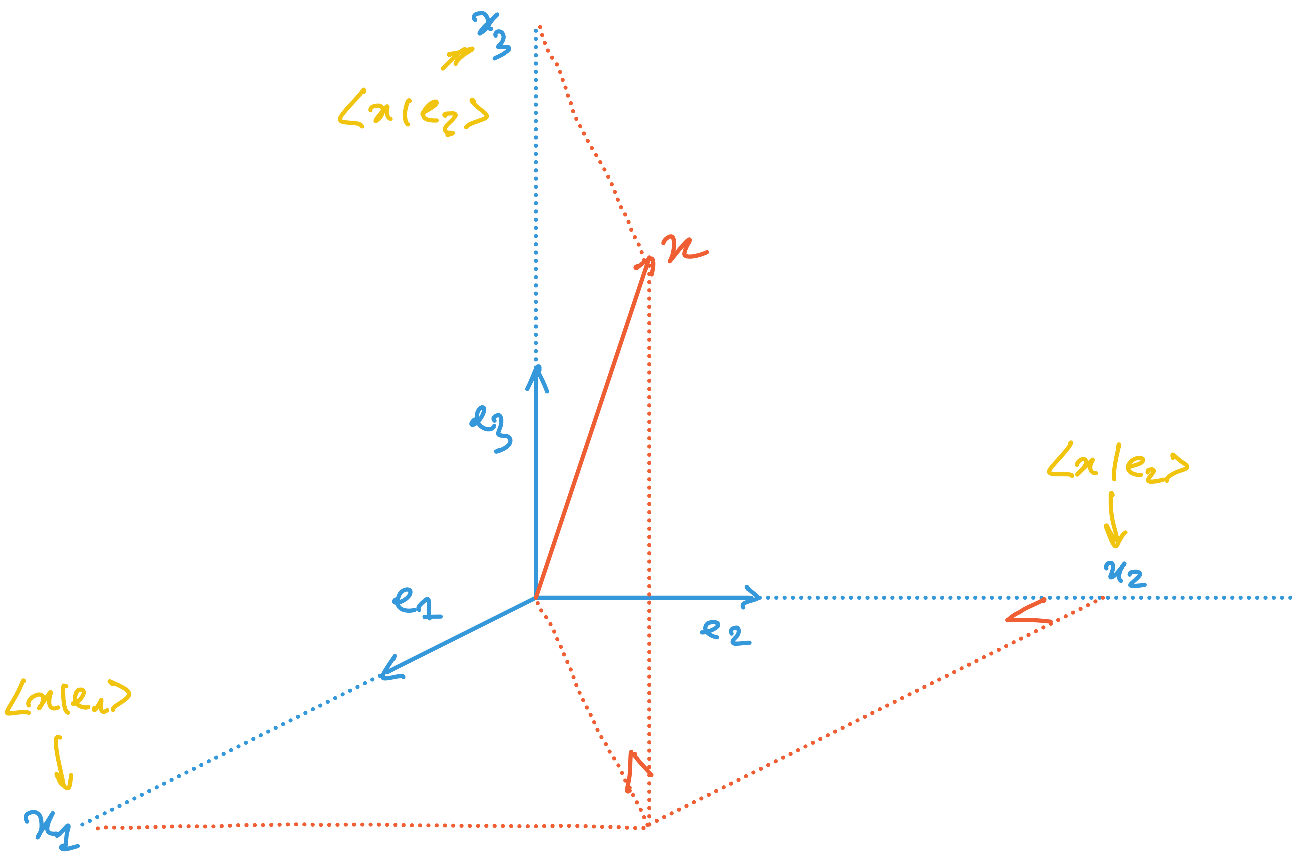
On calcule alors :

$$\langle e_i | x \rangle = \langle e_i | \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \langle e_i, e_j \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{ij}$$

$$= x_i$$



x_3
$\langle x | e_2 \rangle$
x
e_3
$\langle x | e_2 \rangle$
x_2
e_1
e_2
$\langle x | e_1 \rangle$
x_1

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, x et y deux vecteurs dont les coordonnées sont respectivement $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors :

$$\langle x, y\rangle = X^\top Y \qquad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{X^\top X} \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Remarque. *On voit ici l'avantage des bases orthonormées : les formules de calcul du produit scalaire et de la norme sont celles du produit scalaire et de la norme canonique de* $\mathbb{R}^n$.

$$E \xleftrightarrow{\mathcal{B} \text{ orthonormée}} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$$

$$x \longleftrightarrow X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

$$\langle x, y\rangle \qquad \langle X, Y\rangle = X^\top Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Preuve : On calcule :

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x | e_i\rangle e_i \;\middle|\; \sum_{j=1}^n \langle y | e_j\rangle e_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x | e_i\rangle \langle y | e_j\rangle \underbrace{\langle e_i | e_j\rangle}_{\delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^n \langle x | e_i\rangle \langle y | e_i\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

car $(\langle x | e_i\rangle)_i$ coord de x

$(\langle y | e_i\rangle)_i$ coord de y.

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $M = (m_{ij})_{ij}$ la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$. Alors, pour tout i, j :

$$m_{ij} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$$

$\mathcal{B}$ base orthonormée de E

$$u \in \mathcal{L}(E) \longleftrightarrow M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$M = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) \cdots & u(e_j) & \cdots u(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & \boxed{m_{ij}} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ e_n \end{array}$$

Par déf, m_{ij} est la coord de $u(e_j)$ selon e_i

donc $m_{ij} = \langle u(e_j) \mid e_i \rangle$

car $\mathcal{B}$ base orthonormée.

<u>Remarque:</u>

On peut définir un espace euclidien

↳ soit en donnant E et un produit scalaire

↳ soit en donnant E et une base orthonormée.

Dans ce 2e cas,

Pour $x, y \in E$, de coord dans $\mathcal{B}$

$(x_1 \cdots x_n)$, $(y_1 \cdots y_n)$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$