Pour le 7 : 1 ex à rédiger

420.12, 420.13, 430.18 ou 430.19

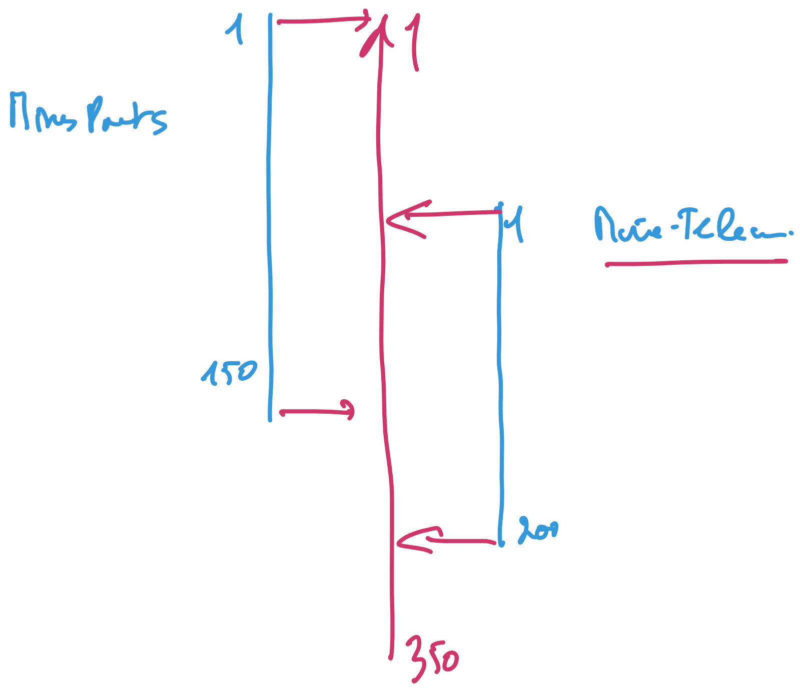
TIPE : commencer à rédiger la bibliographie commentée

↳ SCEI / TIPE / Attendus pédagogiques / ex MCOT.

SCEI Mines-Ponts ou Mines-Telecom ?

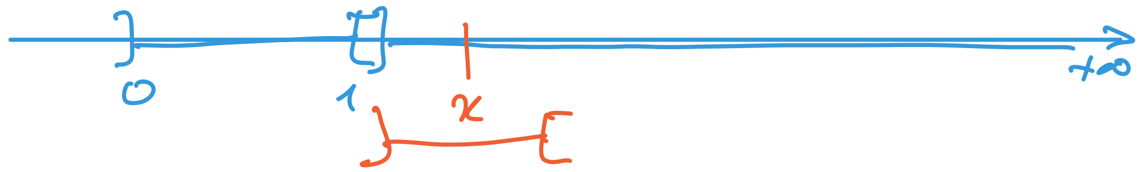
Écrit commun

Oral commun ou oral spécifique MT.



Dans $\mathbb{R}$

$A =]0,1[\cup]1,+\infty[$



A ouvert : union de 2 ouverts.

$]0,1[= B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est ouvert.

$]1,+\infty[= \bigcup$ ouverts ...

ou : $]1,+\infty[$ est voisinage de tous ses points

Soit $x \in]1,+\infty[$

$\exists \delta = x - 1$

tq $B(x,\delta) \subset]1,+\infty[$

ou : $\mathbb{R} \setminus]1,+\infty[=]-\infty, 1]$ fermé.

par caract. séq.

Soit $(u_n)_n$ suite de $]-\infty,1]$ convergente

Mq la limite est dans $]-\infty,1]$

On note ℓ sa limite.

$\forall n \quad u_n \leq 1$

À la limite, $\quad \ell \leq 1$

Donc $]-\infty, 1]$ fermé

donc $]1, +\infty[$ ouvert.

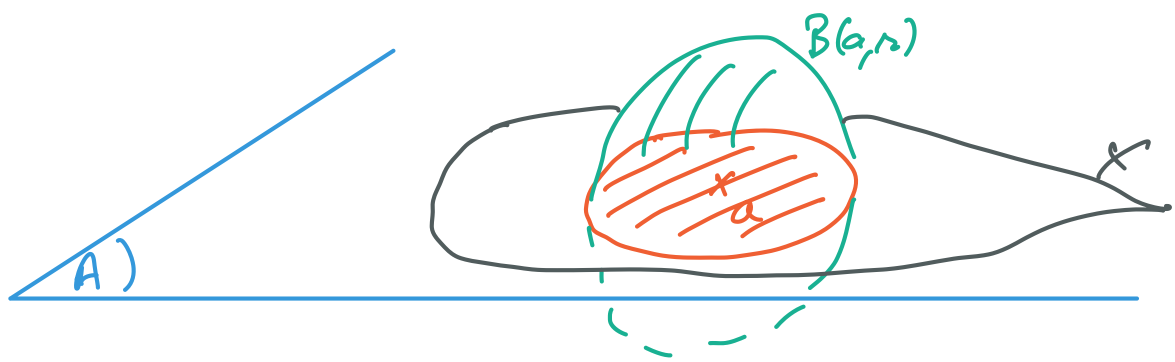
$]-\infty, +\infty[$ est un fermé.

Dans $\mathbb{R}^2$

$B = [0,1] \times [1,2]$

* produit de 2 fermé
* caract. séq.

E



4 Topologie induite

4.1 Voisinage relatif, ouvert relatif

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie quelconque de E. Soit $a \in A$ et $X \subset A$. On dit que X est un **voisinage relatif de a dans A** s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap A \subset X$

Remarque. *Ainsi, les voisinages relatifs de a dans A sont les intersections avec A des voisinages de a (dans E).*

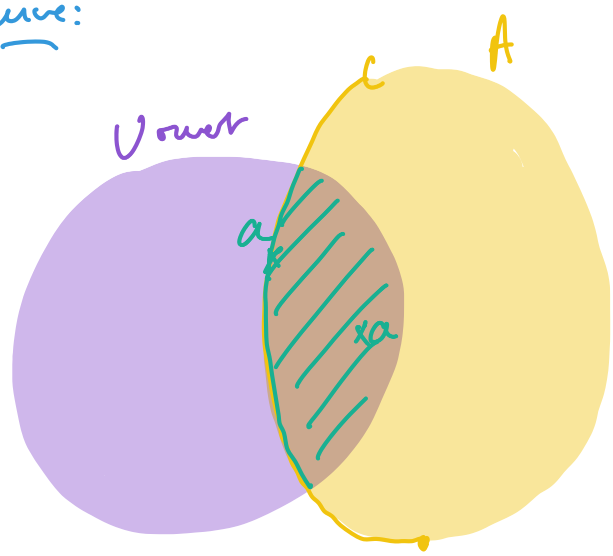
Définition. On conserve les notations précédentes. On dit que X est un **ouvert relatif de** A si et seulement s'il est voisinage relatif de chacun de ses points, c'est-à-dire :

$$\forall a \in X,\ \exists r > 0 \text{ t.q. } B(a, r) \cap A \subset X$$

Proposition. X est un ouvert relatif de A si et seulement s'il existe U ouvert (de E) tel que $X = U \cap A$.

Remarque. *On dit parfois que $U \cap A$ est la **trace** laissée par U sur A.*

Preuve :



$X = U \cap A$

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $a \in X \subset U$ ouvert

donc $\exists \delta > 0$ tq $B(a, \delta) \subset U$

$B(a,\delta) \cap A \subset U \cap A = X$

donc X est voisinage relatif de ses éléments.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall x \in X$, $\exists \delta_x$ tq $B(x, \delta_x) \cap A \subset X$

Posons $U = \bigcup_{x \in X} B(x, \delta_x)$

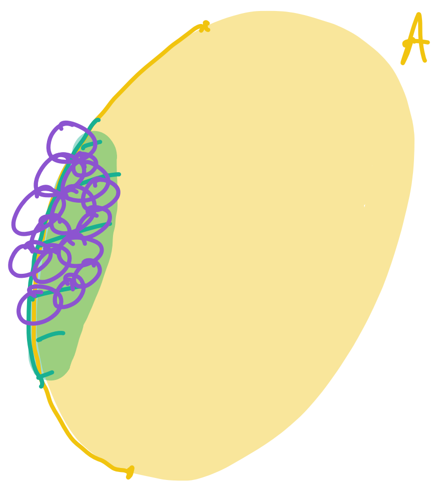
union de boules ouvertes, donc ouvert.

et $U \cap A = \bigcup_{x \in X} B(x, \delta_x) \cap A$

$\subset X \cap A$

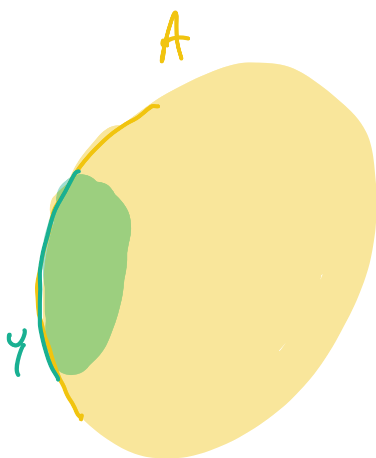
$\subset X$

inclusion réciproque directe.



Exemple. Les parties suivantes sont-elles des ouverts relatifs de $[0,1]$?

1. $[0,1]$
2. $\{0\}$
3. $[0,1/2]$
4. $[0,3/4[$
5. $[0,1] \setminus [1/2,3/4]$
6. $]0,1[$
7. $]0,1/2[$



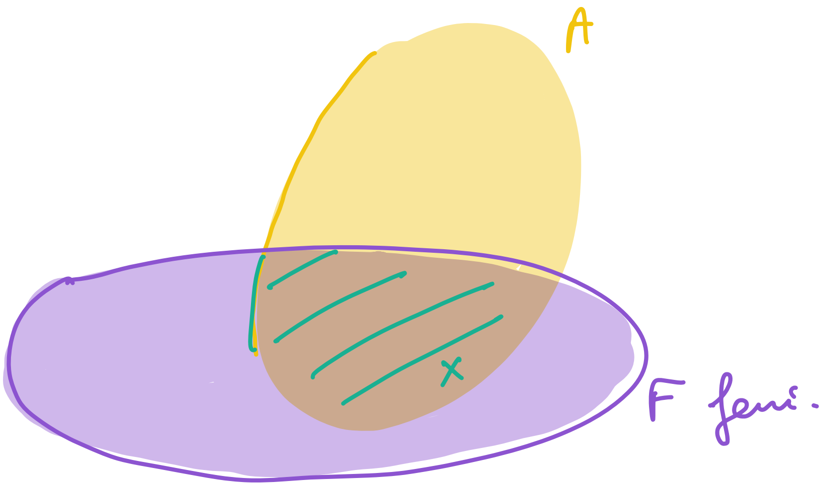
Y ouvert relatif de A

4.2 Fermé relatif

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie quelconque de E. On dit que $X \subset A$ est un **fermé relatif de** A lorsque $A \setminus X$ est un ouvert relatif de A.

Proposition. X est un fermé relatif de A si et seulement s'il existe F fermé (de E) tel que $X = F \cap A$.

Remarque. *On dit parfois que $F \cap A$ est la* ***trace*** *laissée par F sur A.*



Caractérisation séquentielle. X est un fermé relatif de A si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers un élément ℓ de A, alors $\ell \in X$.

Exemple. Est-ce que $]-\infty, 0[$ est un ouvert relatif de $\mathbb{R}^*$? un fermé relatif de $\mathbb{R}^*$?

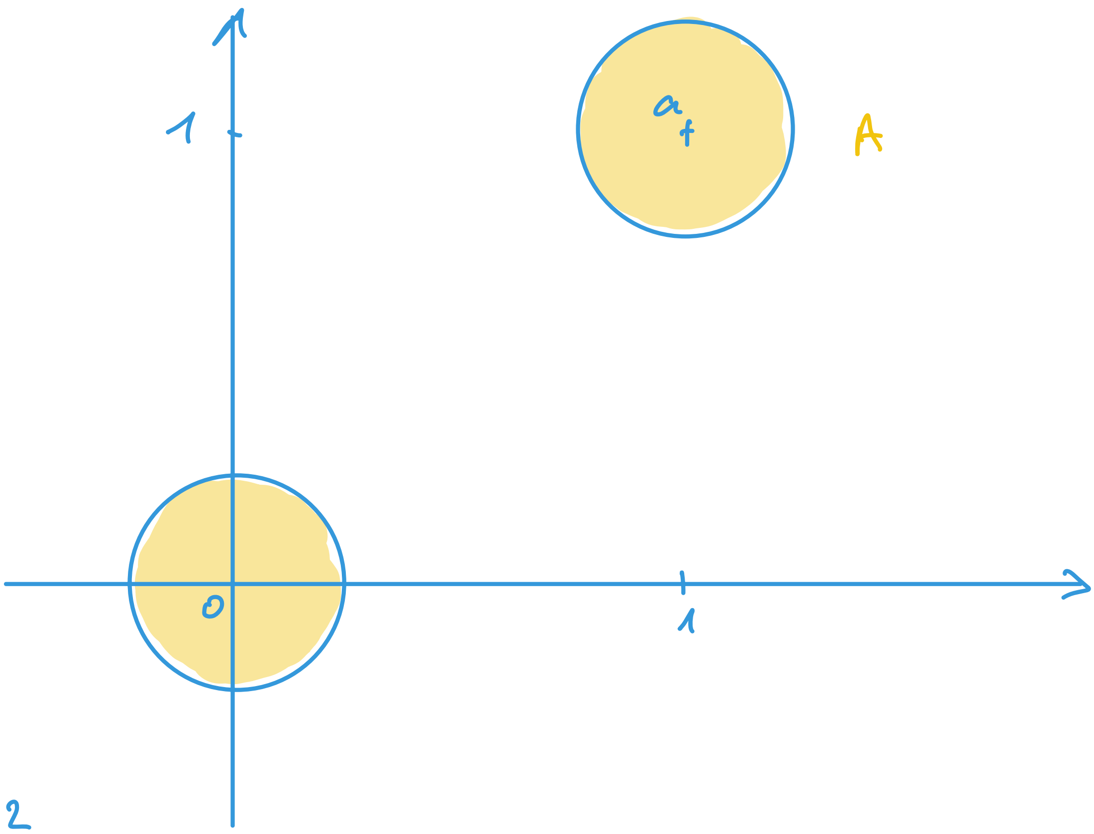
$X =]-\infty, 0[=]-\infty, 0] \cap \mathbb{R}^*$

est un fermé relatif de $\mathbb{R}^*$

$=]-\infty, 0[\cap \mathbb{R}^*$

est un ouvert relatif de $\mathbb{R}^*$

Exemple. Dans $E = \mathbb{R}^2$, on note $O = (0, 0)$ et $a = (1, 1)$ et on considère $A = B(O, 1/4) \cup B(a, 1/4)$. Proposer quatre parties de A qui sont à la fois des ouverts relatifs et des fermés relatifs de A.



norme $\|\cdot\|_2$

$X_1 = B(O, \frac{1}{4})$ ouvert relatif

fermé relatif de A

car $X_1 = A \cap BF(O, \frac{1}{2})$

$= A \cap B(O, \frac{1}{2})$

$\emptyset$, A , $B(a, \frac{1}{4})$

4.3 Densité

Définition. On dit que $X \subset A$ est **dense** dans A lorsque tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de X.

ie $A \subset \overline{X}$