Pour me 430.13
430.23

Topologie des espaces vectoriels normés

1 Points intérieurs, ouvert, voisinage

1.1 Voisinage d'un point

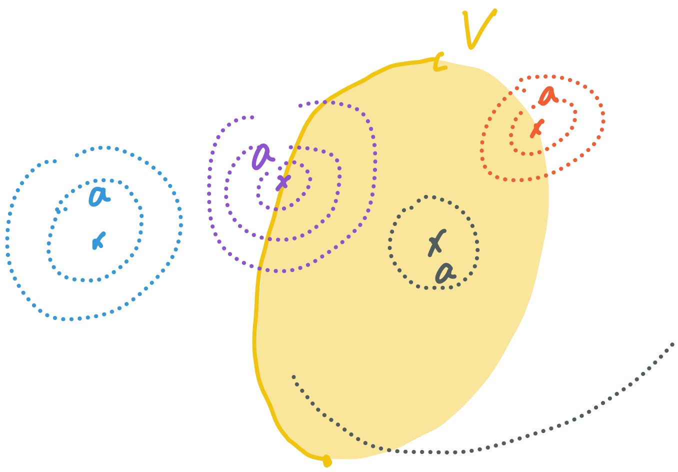
Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $a \in E$. On dit qu'une partie V de E est un **voisinage de** a lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$B(a, \delta) \subset V$$

où $B(a, \delta) = \{x \in E, \; \|x - a\| < \delta\}$.

Remarque.

- *L'usage est d'utiliser une boule ouverte, une inégalité stricte.*
- *On trouve parfois la notation $\mathcal{V}(a)$ pour désigner l'ensembles des voisinages de a.*



Voisinage de a non

Proposition.

- Si V est un voisinage de a et $V \subset W$ alors W est un voisinage de a.
- Une intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a.
- Une réunion de voisinages de a est un voisinage de a.

Remarque. *Pour la réunion, il suffit en fait qu'un seul ensemble soit un voisinage.*

Proposition. Si N et N' sont deux normes équivalentes, les voisinages de a dans (E, N) et (E, N') sont les mêmes.

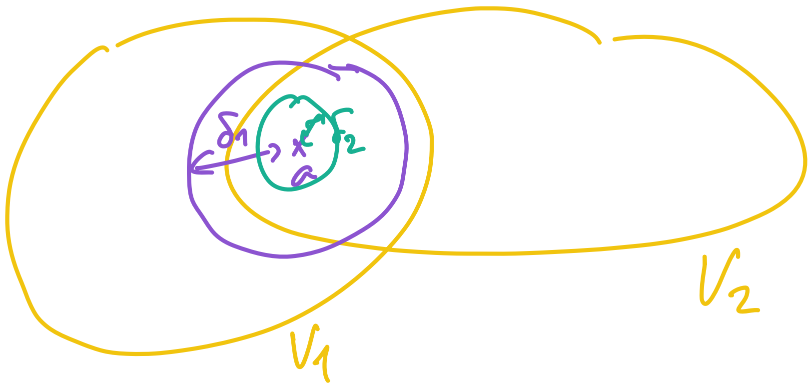
Preuve : Soit $V_1, \ldots, V_n$ des voisinages de a

donc $\exists \delta_1, \ldots, \delta_n > 0$ tq $\forall k$ $B(a, \delta_k) \subset V_k$

On pose $\delta = \min(\delta_1, \ldots, \delta_n)$

donc $\forall k$ $B(a, \delta) \subset B(a, \delta_k) \subset V_k$

Donc $B(a, \delta) \subset \bigcap_{k=1}^{n} V_k$



Réunion : Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille de voisinages de a.

$\exists i_0$ tq $a \in V_{i_0}$ voisinage de a

donc $\exists \delta > 0$ tq $B(a, \delta) \subset V_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} V_i$

Proposition. Si N et N' sont deux normes équivalentes, les voisinages de a dans (E, N) et (E, N') sont les mêmes.

On suppose $\exists \alpha, \beta > 0$ tq $\forall x \in E$

$$\alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)$$

pour $r > 0$ $\quad B(a, r) \subset B'(a, \beta r)$

pour la norme N $\qquad$ pour la norme N'

et $\quad B'(a, r) \subset B\left(a, \frac{r}{\alpha}\right)$

Soit V un voisinage de a pour N

donc $\exists \delta > 0$ tq $\quad B(a, \delta) \subset V$

donc $\quad B'(a, \alpha\delta) \subset V$

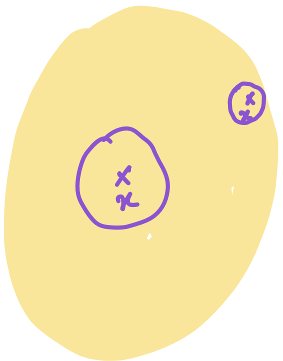
donc V voisinage de a pour N'

1.2 Ouvert

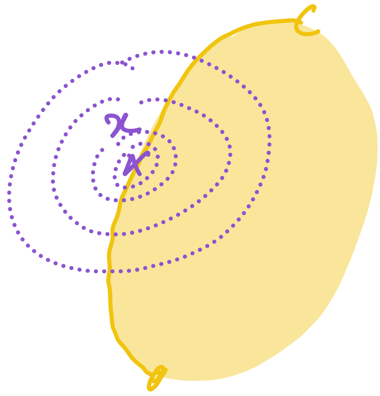
Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. On dit qu'une partie U de E est un **ouvert** lorsque U est voisinage de chacun de ses points, i.e. :

$$\forall x \in U,\ \exists \delta > 0,\ B(x, \delta) \subset U$$

Remarque. *E et $\varnothing$ sont ouverts.*

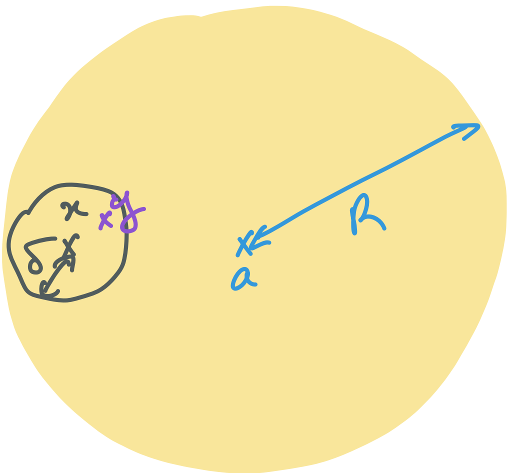


U ouvert



U pas ouvert

Proposition. Une boule ouverte est un ouvert.



Montrons que $B(a,R)$ ouvert

Soit $x \in B(a,R)$

On cherche $\delta > 0$ tq

$B(x,\delta) \subset B(a,R)$

Posons $\delta = R - \|x-a\|$

Soit $y \in B(x,\delta)$

$$\begin{aligned} \|y-a\| &= \|y-x+x-a\| \\ &\leq \|y-x\| + \|x-a\| \\ &< \delta + \|x-a\| \\ &= R \end{aligned}$$

donc $B(x,\delta) \subset B(a,R)$

Proposition.

- Une réunion d'ouverts est un ouvert :

$$\bigcup_{i \in I} U_i \text{ est ouvert}$$

- Une intersection finie d'ouverts est un ouvert :

$$U_1 \cap \cdots \cap U_p \text{ est ouvert}$$

Remarque. *L'intérêt de travailler dans un ouvert, c'est que ses éléments ne sont jamais « au bord ».*

Proposition. Un produit fini d'ouvert est un ouvert.

Soit $E_1, \dots, E_n$ des espaces normés

$E_1 \times \dots \times E_n$ est un espace normé, l'espace produit.

Soit $U_1, \dots, U_n$ des ouverts de $E_1 \dots E_n$ resp.

Alors $U_1 \times \dots \times U_n$ est un ouvert de $E_1 \times \dots \times E_n$.

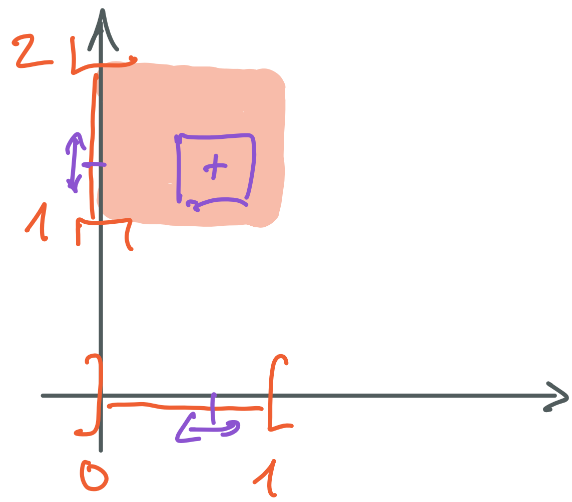
Cas où $n=2$, $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$, $|\cdot|$ $|\cdot|$ $\qquad E_1 \times E_2 = \mathbb{R}^2$, $\|\cdot\|_\infty$

$U_1 =]0,1[$

$U_2 =]1,2[$

ouverts de $\mathbb{R}$

$U_1 \times U_2 =]0,1[\times]1,2[$ ouvert de $E_1 \times E_2$



Soit $x = (x_1 \dots x_n) \in U_1 \times \dots \times U_n$

Boule dans (E_k, N_k)

$\forall k$ $x_k \in U_k$ ouvert donc $\exists \delta_k$ tq $B(x_k, \delta_k) \subset U_k$

On considère $\delta = \min(\delta_1 \ldots \delta_n)$

$$y \in B(x,\delta) \iff N(x-y) < \delta$$

$$\iff \max_{k=1}^{n} \left(N_k(x_k - y_k) \right) < \delta$$

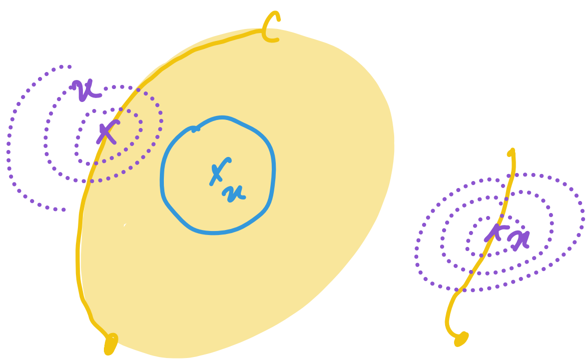
par déf de la norme produit

$$\iff \forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad N_k(x_k - y_k) < \delta$$

$$\iff y \in \prod_{k=1}^{n} B(x_k, \delta)$$

or $\forall k$ $B(x_k, \delta) \subset U_k$

donc $B(x, \delta) \subset \prod_{k=1}^{n} U_k$



1.3 Point intérieur, intérieur

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie de E. Un point a de E est dit **intérieur à** A lorsque A est un voisinage de a, i.e. :

$$\exists \delta > 0,\ B(a, \delta) \subset A$$

On appelle **intérieur de** A l'ensemble $\mathring{A}$ de tous les points intérieurs à A.

Proposition. A est ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$.

Proposition. L'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.

Preuve : • $\mathring{A} \subset A$ toujours vrai

• $\boxed{\Leftarrow}$ ~~On suppose~~ A ouvert.

$\Leftrightarrow$ A est voisinage de tous ses point

$\Leftrightarrow$ $\forall x \in A,$ A est voisinage de x ie $x \in \mathring{A}$

$\Leftrightarrow$ $A \subset \mathring{A}$

Preuve:

Mque $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{V \text{ ouvert} \\ V \subset A}} V$

On note $U = \bigcup_{\substack{V \text{ ouvert} \\ V \subset A}} V$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \mathring{A}$

ie $\exists \delta > 0$ tq $\underbrace{B(x, \delta)}_{\text{c'est un ouvert, c'est l'un des } V} \subset A$

donc $x \in U$.

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in U$

ie $\exists V$ ouvert tq $V \subset A$ et $x \in V$

or V ouvert donc c'est un voisinage de x

or $A \supset V$ donc A voisinage de x ie $x \in \mathring{A}$

Bref : $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{V \text{ ouvert} \\ V \subset A}} V$

Corollaire $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

Preuve $\mathring{A}$ est un ouvert (union d'ouvert)

il est inclus dans A

il contient tous les ouverts inclus dans A

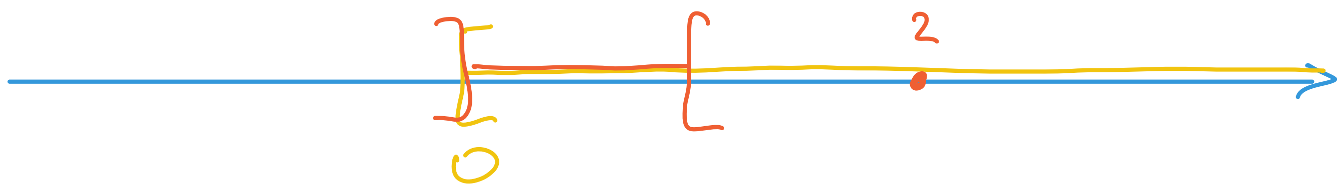
Exemple: Dans $\mathbb{R}$

$A = \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathring{A} = \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{R}$ ouvert

$B = [0, +\infty[$ $\quad$ $\mathring{B} =]0, +\infty[$ $\quad$ $]0, +\infty[$ ouvert

$C =]0, 1[\cup \{2\}$ $\quad$ $\mathring{C} =]0, 1[$ $\quad$ $]0,1[$ ouvert

$D = \mathbb{Z}$ $\quad$ $\mathring{D} = \emptyset$



2 Points adhérents, fermé, densité

2.1 Fermé

Définition. On dit qu'une partie A de E est un **fermé** lorsque $E \setminus A = A^c$ est un ouvert.

Exemple. E et $\varnothing$ sont fermés.

2.4 Caractérisations séquentielles

Proposition. Une partie A de E est un fermé si et seulement si, pour toute suite convergente d'éléments de A, sa limite est dans A.

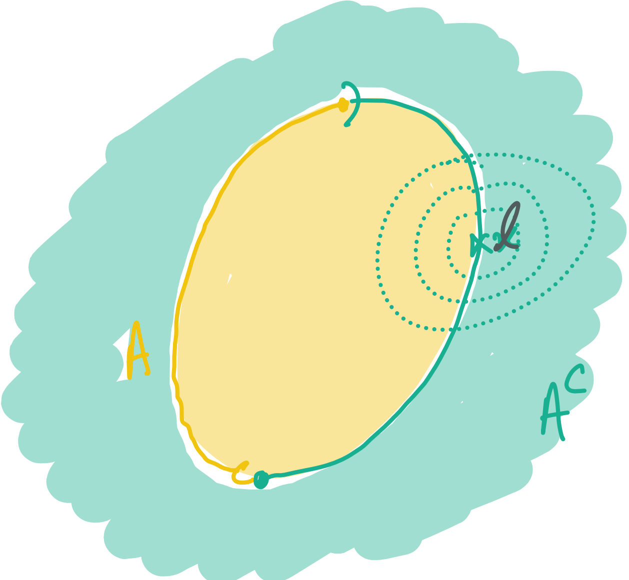
Remarque. *L'intérêt de travailler dans un fermé, c'est que « quand on y est, on y reste », même en passant à la limite.*

Preuve:

$\boxed{\Leftarrow}$ Par contraposée.

On suppose A non fermé ie $E \setminus A$ non ouvert

Mque $\exists (u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ où $\ell \notin A$



On sait que $E \setminus A$ non ouvert

ie $\exists \ell \in E \setminus A$ tq $\forall \delta > 0$

$B(\ell, \delta) \not\subset E \setminus A$

ie $B(\ell, \delta) \cap A \neq \varnothing$

$E \setminus A$ non ouvert donc, par déf,

$\exists \ell \in E \setminus A$ tq $\forall \delta > 0$, $B(\ell, \delta) \cap A \neq \varnothing$

Avec $\delta = \frac{1}{n}$, $\exists u_n \in B(\ell, \frac{1}{n}) \cap A$

On a construit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'élém de A

tq $\|u_n - \ell\| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ie $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose A fermé ie $E \setminus A$ ouvert

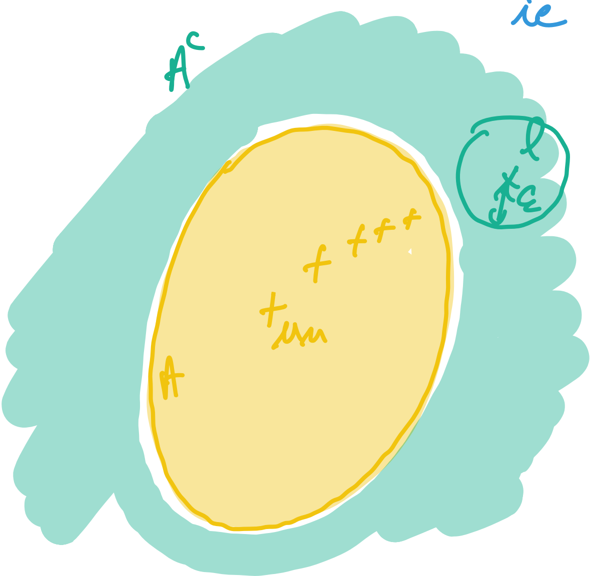
Soit $(u_n)_n$ suite convergente d'éléments de A.

On note ℓ la limite. Mq $\underline{\ell \in A}$

Par l'absurde. On suppose $\ell \notin A$ ie $\ell \in E \setminus A$ qui est ouvert

donc $\exists \varepsilon > 0$ tq $B(\ell, \varepsilon) \subset E \setminus A$

ie $\forall x \quad \|x - \ell\| < \varepsilon \Rightarrow x \notin A$



Par déf de convergence avec ce ε,

$\exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$, $\|u_n - \ell\| < \varepsilon$

donc, pour $n \geq n_0$, $u_n \notin A$

contredit l'hypothèse.

Remarque: il est plus facile de manipuler les fermés pour la caract. séquentielle que par la déf.

2.1 Fermé

Proposition. Une boule fermée est fermée, une sphère est fermée, un singleton $\{a\}$ est fermé.

Proposition.

- Une réunion finie de fermés est un fermé.
- Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Proposition. Un produit fini de fermés est un fermé.

Mque $BF(a,R)$ est un fermé

M1 par caract. séquentielle.

Soit $(u_n)_n$ suite d'éléments de $BF(a,R)$ convergente vers ℓ. Mque $\ell \in BF(a,R)$

On a $\|u_n - a\| \leq R$

Par passage à la limite dans les inégalités larges

$$\|\ell - a\| \leq R$$

ie $\ell \in BF(a,R)$.

M2 par les boules, Mque $E \setminus BF(a,R)$ ouvert

Soit $x \in E \setminus BF(a,R)$ ie $\|x-a\| > R$

Posons $\rho = \|x-a\| - R > 0$

Mque $B(x,\rho) \subset E \setminus BF(a,R)$.

Soit $y \in B(x,\rho)$

$$\|y-a\| = \|y - x + x - a\|$$

$$\geq \|x-a\| - \|y-x\|$$

$$> \|x-a\| - \rho$$

$$= R$$

donc $y \in E \setminus BF(a,R)$

Proposition.

- Une réunion finie de fermés est un fermé.
- Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

) passer au complémentaire.

Proposition. Un produit fini de fermés est un fermé.

preuve par caract. séquentielle.

Soit $E_1, \dots, E_n$ espaces normés

$F_1 \dots F_n$ fermés de $E_1 \dots E_n$ resp.

Mque $F_1 \times \dots \times F_n$ fermé de $E_1 \times \dots \times E_n$

Soit $(u_k)_k$ suite convergente de $F_1 \times \dots \times F_n$

On note $u_k = (u_k^1, \dots, u_k^n)$

$\ell = (\ell^1, \dots, \ell^n)$ la limite

$u_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \ell$ donc $u_k^1 \xrightarrow[+\infty]{} \ell^1, \dots, u_k^n \xrightarrow[+\infty]{} \ell^n$

Comme $F_1 \dots F_n$ sont fermés, $\ell^1 \in F_1, \dots \ell^n \in F_n$

ie $\ell \in F_1 \times \dots \times F_n$.

2.2 Point adhérent, adhérence, frontière

il est collé

Définition. Soit A une partie de E. On dit que $x \in E$ est **adhérent à** A lorsque :

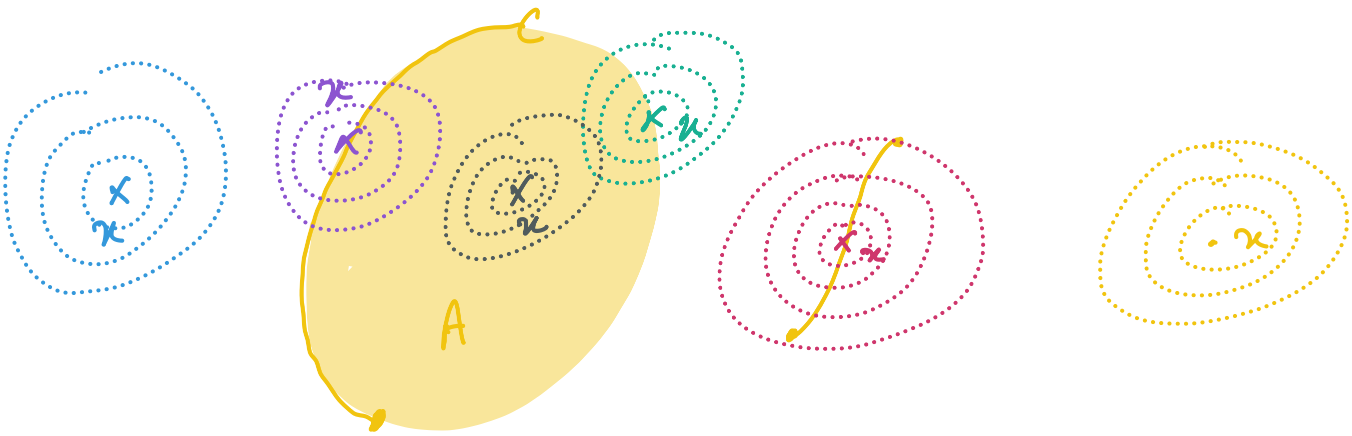
$$\forall \delta > 0,\ B(x, \delta) \cap A \neq \varnothing$$

On appelle **adhérence de** A l'ensemble $\overline{A}$ de tous les points adhérents à A.

Proposition. A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

2.4 Caractérisations séquentielles

Proposition. x est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.



$A \subset \overline{A}$ évidemment.

Preuve : savoir faire.

Remarque : $E \setminus A = A^c = \cancel{\overline{A}}$

$\complement_E A$

Proposition. L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A.

Étape 1 : Mque $(\overline{A})^c = (\mathring{A^c})$

$$x \in \overline{A} \iff \forall \delta > 0,\ B(x,\delta) \cap A \neq \emptyset$$

$$x \in (\overline{A})^c \iff x \notin \overline{A}$$

$$\iff \exists \delta > 0\ B(x,\delta) \cap A = \emptyset$$

$$\iff \exists \delta > 0\ B(x,\delta) \subset E \setminus A$$

$$\iff x \in (E \mathring{\setminus} A)$$

Étape 2.

On a montré : $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{V \text{ ouvert} \\ V \subset A}} V$

$$\overline{A} = E \setminus \left(\overline{A}^c\right) = E \setminus \left((E \mathring{\setminus} A) \right) = E \setminus \bigcup_{\substack{V \text{ ouvert} \\ V \subset E \setminus A}} V$$

$$= \bigcap_{\substack{V \text{ ouvert} \\ V \subset E \setminus A}} V^c$$

$V \subset E \setminus A \iff A \subset V^c$

V ouvert $\iff V^c$ fermé.

$$= \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ A \subset F}} F$$

C'est un fermé comme inters. de fermés, contenant A.

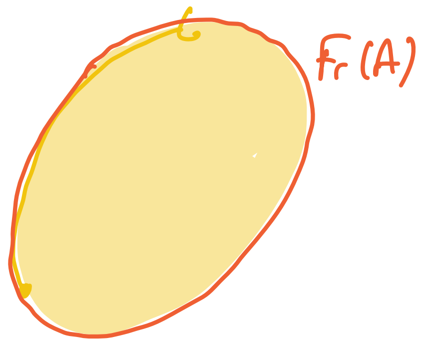
Proposition. On dispose de l'équivalence suivante :

$$x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$$

430.1

Définition. On appelle **frontière de** A l'ensemble :

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$$



2.3 Densité

Définition. Une partie A de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dite **dense dans** E lorsque $\overline{A} = E$, c'est-à-dire :

- tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A

ou alors

- $\forall x \in E,\ \forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \varnothing$.

Exemple. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exemple. Le sous-espace des fonctions polynomiales est dense dans $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ par le théorème de Weierstrass.

Exemple. Le sous-espace des fonctions en escalier est dense dans l'ensemble $(\mathcal{C}^0_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions continues par morceaux.

3 Topologie et normes équivalentes

Théorème.

Les notions topologiques étudiées ci-avant sont invariante par passage à une norme équivalente :

- Si A est un ouvert de (E, N_1) et N_2 équivalente à N_1, alors A est un ouvert de (E, N_2).
- L'intérieur de A dans (E, N_1), lorsque N_2 équivalente à N_1, est le même que l'intérieur de A dans (E, N_2).
- etc.

4 Topologie induite

4.1 Voisinage relatif, ouvert relatif

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie quelconque de E. Soit $a \in A$ et $X \subset A$. On dit que X est un **voisinage relatif de a dans A** s'il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \cap A \subset X$

Remarque. *Ainsi, les voisinages relatifs de a dans A sont les intersections avec A des voisinages de a (dans E).*

Définition. On conserve les notations précédentes. On dit que X est un **ouvert relatif de A** si et seulement s'il est voisinage relatif de chacun de ses points, c'est-à-dire :

$$\forall a \in X,\ \exists r > 0 \text{ t.q. } B(a,r) \cap A \subset X$$

Proposition. X est un ouvert relatif de A si et seulement s'il existe U ouvert (de E) tel que $X = U \cap A$.

Remarque. *On dit parfois que $U \cap A$ est la **trace** laissée par U sur A.*

Exemple. Les parties suivantes sont-elles des ouverts relatifs de $[0,1]$?

1. $[0,1]$
2. $\{0\}$
3. $[0,1/2]$
4. $[0,3/4[$
5. $[0,1] \setminus [1/2,3/4]$
6. $]0,1[$
7. $]0,1/2[$

4.2 Fermé relatif

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie quelconque de E. On dit que $X \subset A$ est un **fermé relatif de** A lorsque $A \smallsetminus X$ est un ouvert relatif de A.

Proposition. X est un fermé relatif de A si et seulement s'il existe F fermé (de E) tel que $X = F \cap A$.

Remarque. *On dit parfois que $F \cap A$ est la* ***trace*** *laissée par F sur A.*

Caractérisation séquentielle. X est un fermé relatif de A si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers un élément ℓ de A, alors $\ell \in X$.

Exemple. Est-ce que $]-\infty, 0[$ est un ouvert relatif de $\mathbb{R}^*$? un fermé relatif de $\mathbb{R}^*$?

Exemple. Dans $E = \mathbb{R}^2$, on note $O = (0,0)$ et $a = (1,1)$ et on considère $A = B(O, 1/4) \cup B(a, 1/4)$. Proposer quatre parties de A qui sont à la fois des ouverts relatifs et des fermés relatifs de A.

4.3 Densité

Définition. On dit que $X \subset A$ est **dense** dans A lorsque tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de X.