Emploi du temps. Pour ma : 420.16, 420.23

SCEI

Espace vectoriel normé

$\|\cdot\|_\infty$

1 Normes

1.1 Définitions

Définition. Une application $N : E \to \mathbb{R}$ est une **norme** sur E si et seulement si elle vérifie :

- Positivité : $\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$
- Séparation : $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \implies x = 0_E$
- Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$
- Homogénéité : $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

Si E est muni d'une norme, on dit que c'est un **espace vectoriel normé**.

Remarque.

- *Lorsqu'il y a un risque d'ambiguité (plusieurs normes possibles), c'est le couple (E, N) qui est appelé espace vectoriel normé.*
- *On note en général $\|x\|$, et non $N(x)$, la norme du vecteur x.*
- *Lorque $\|x\| = 1$, on dit que x est un vecteur* ***unitaire****. Lorsque $x \neq 0$, $\dfrac{1}{\|x\|}x$ est unitaire, de même direction et même sens que x.*

Exemple. Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{K}[X]$ en posant :

$$\|P\| = \int_0^{+\infty} |P(t)|\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

- Existence

$\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $t \mapsto |P(t)|e^{-t}$ continue (par mcx) sur $[0,+\infty[$

Au voisinage de $t \to +\infty$ $|P(t)|e^{-t} = o(e^{t/2})\, e^{-t} = o(e^{-t/2})$

donc l'intégrale cv absolument.

- Positivité

$\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\forall t \in [0,+\infty[$ $|P(t)|e^{-t} \geq 0$ donc $\|P\| \geq 0$.

- Séparation

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $\|P\| = 0$ ie $\int_0^{+\infty} |P(t)|e^{-t}\,dt = 0$

intégrale nulle d'une fonction continue positive

donc $\forall t \in [0,+\infty[$ $|P(t)|e^{-t} = 0$

P admet une infinité de racines donc $P = 0$

- Inég. triangulaire

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

$$\begin{aligned} \|P+Q\| &= \int_0^{+\infty} |P(t)+Q(t)|\,e^{-t}\,dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left(|P(t)| + |Q(t)|\right) e^{-t}\,dt \\ &= \|P\| + \|Q\| \end{aligned}$$

- Homogénéité

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\|\lambda P\| = \int_0^{+\infty} |\lambda P(t)| e^{-t} \, dt$$

$$= |\lambda| \int_0^{+\infty} |P(t)| e^{-t} \, dt$$

$$= |\lambda| \, \|P\|$$

Donc $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{K}[X]$.

Proposition. Pour tous vecteurs de E, on a :

- $\|0_E\| = 0$
- $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| \qquad (\leqslant \|x\| + \|y\|)$
- $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x + y\| \qquad (\leqslant \|x\| + \|y\|)$

- $$\|0_E\| = \|0_{\mathbb{K}} \cdot 0_E\|$$
$$= |0_{\mathbb{K}}| . \|0_E\|$$
$$= 0$$

- $\forall x, y \in E$ $\quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
$$\|x - y\| = \|x + (-y)\|$$
$$\leq \|x\| + \|-y\|$$
$$= \|x\| + |-1| \, \|y\|$$
$$= \|x\| + \|y\|$$

$$\|x\| = \|x + y - y\|$$
$$\leq \|x + y\| + \|y\|$$

donc $\quad \|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|$

de m $\quad \|y\| - \|x\| \leq \|x + y\|$

Bref $\quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x + y\|$

Proposition. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors la norme sur E induit une norme sur F.

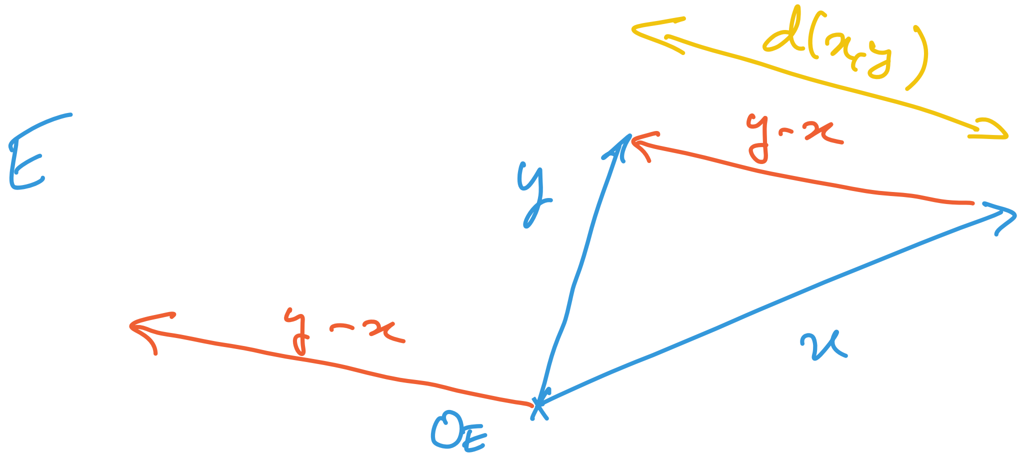
$$N : E \longrightarrow \mathbb{R}$$ une norme.

$$x \longmapsto N(x) = \|x\|$$

On considère $N|_F : F \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto N(x) = \|x\|$$

alors $N|_F$ est une norme.



Définition. On appelle **distance associée à** $\|\cdot\|$ l'application :

$$\begin{array}{rccl} d: & E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & \|y-x\| \end{array}$$

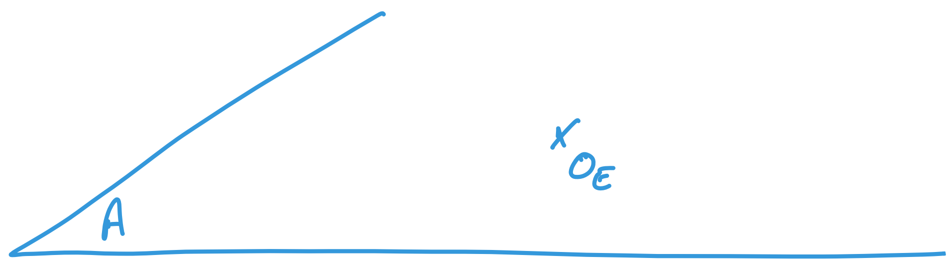
Proposition. Pour tous vecteurs de E, on a :

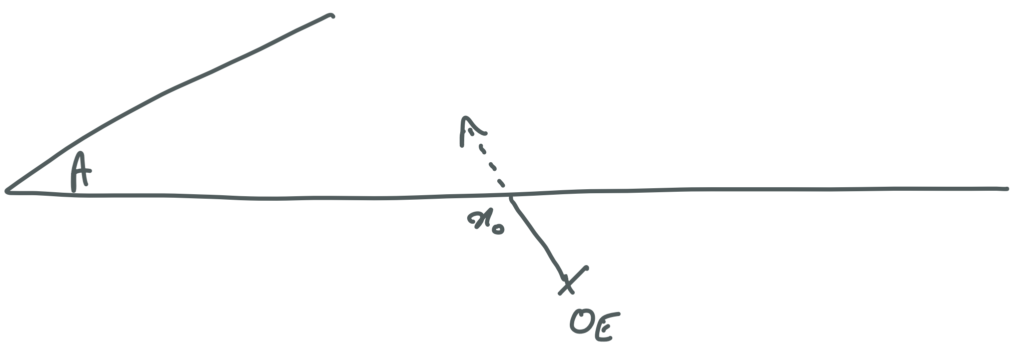
- $d(x,y) \geqslant 0$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) = 0 \implies x = y$
- $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

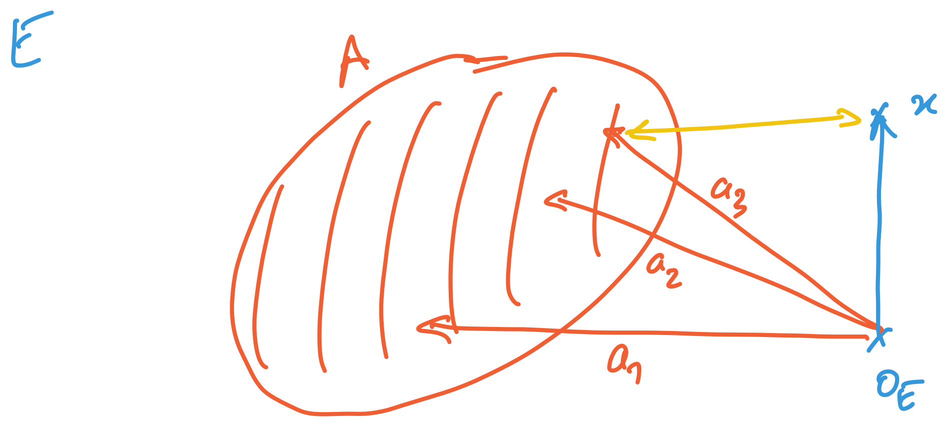
Définition. Soit A une partie non vide de E, et $x \in E$. On appelle **distance de** x **à** A la quantité :

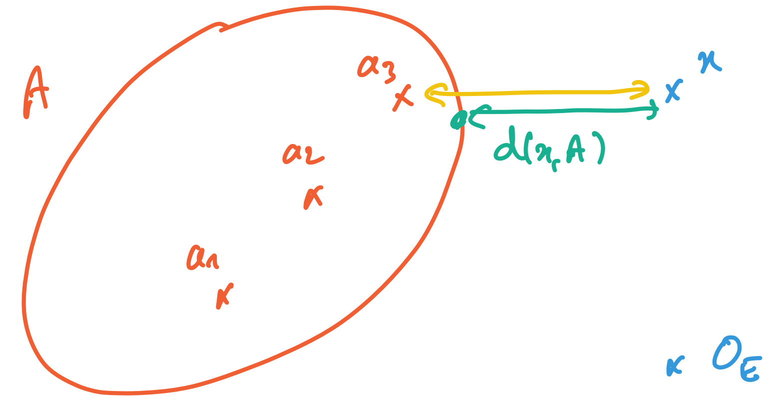
$$d(x,A) = \mathrm{Inf}\{\|x-a\|,\ a \in A\}$$

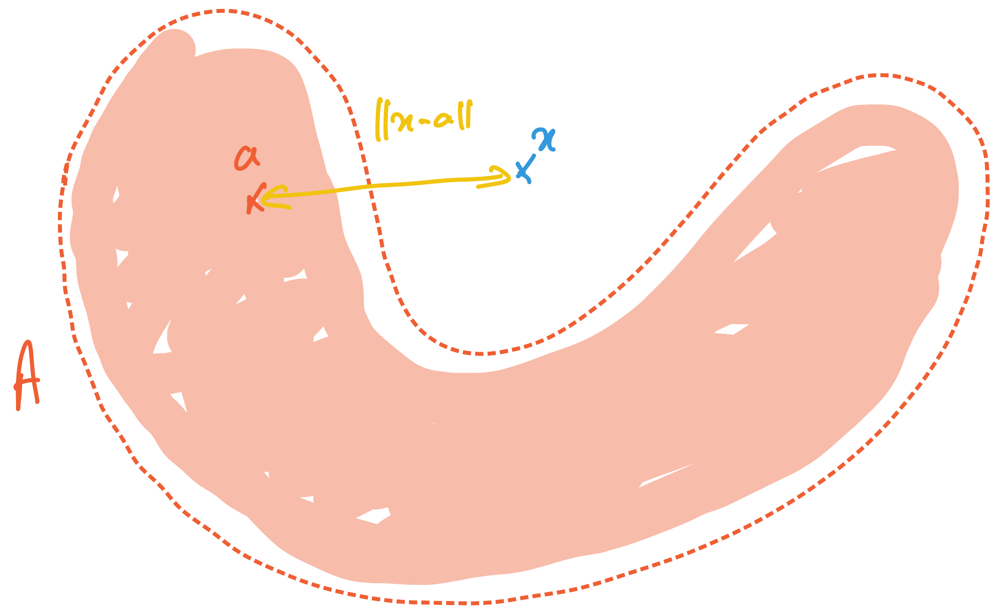
Remarque. *Si $x \in A$, alors $d(x,A) = 0$, mais on verra que la réciproque est fausse en général.*











<u>Existence ?</u> $\quad d(x, A) = \inf_{x \in A} \|x-a\|$

$\{\|x-a\|, a \in A\}$ est une partie de $\mathbb{R}$

non vide car $A \neq \emptyset$

minorée par 0.

Donc Inf existe.

1.2 Norme euclidienne associée à un produit scalaire

Théorème.

Si E est un espace préhilbertien réel, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne son produit scalaire, alors l'application définie par :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

définit une norme sur E, appelée **norme euclidienne** associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

cf 310

1.3 Les normes usuelles

1.3.1 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$

Définition. Pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, on définit :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2}, \qquad \|x\|_\infty = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i|$$

appelées respectivement les **normes** 1, 2 **et infinie**.

Théorème.

$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^p$.

Pour $\|.\|_1$

- $\forall x \in \mathbb{K}^p, \quad \|x\|_1 \geq 0$
- Soit $x \in \mathbb{K}^p$ tq $\|x\|_1 = 0$ ie $\sum_{i=1}^{p} |x_i| = 0$

  somme nulle de termes positifs

  donc $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad |x_i| = 0$ ie $x = 0$
- Soit $x, y \in \mathbb{K}^p$

  $$\begin{aligned} \|x+y\|_1 &= \sum_{i=1}^{p} |x_i + y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} |x_i| + |y_i| \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1 \end{aligned}$$
- Soit $x \in \mathbb{K}^p, \lambda \in \mathbb{K}$

  $$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \sum_{i=1}^{p} |\lambda x_i| \\ &= |\lambda| \sum_{i=1}^{p} |x_i| \\ &= |\lambda| \, \|x\|_1 \end{aligned}$$

Ainsi $\|.\|_1$ est une norme

Pour $\|\cdot\|_\infty$:

- Pour $x \in \mathbb{K}^p$, $\|x\|_\infty$ existe car max de p termes
- $\forall x \in \mathbb{K}^p$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ $|x_i| \geq 0$

  donc $\|x\|_\infty \geq 0$
- Soit $x \in \mathbb{K}^p$ tq $\|x\|_\infty = 0$

  $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $0 \leq |x_i| \leq \|x\|_\infty = 0$

  donc $\forall i$ $x_i = 0$ ie $x = 0$
- Inég triangulaire ⚠

  Soit $x, y \in \mathbb{K}^p$.

  Mque: $\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

  Majorer $\|x+y\|_\infty$, c'est majorer $\max(|x_i+y_i|)$

  ie majorer $|x_i+y_i|$ uniformément, ie indép de i

  $\forall i$ $|x_i+y_i| \leq |x_i| + |y_i|$

  $\leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ indép de i

  donc $\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.
- Homogénéité

  $\rightarrow$ oui ... cf plus loin.

Pour $\|\cdot\|_2$:

$\rightarrow$ norme euclidienne, cf 310

1.3.2 Normes usuelles sur l'ensemble des matrices

Exemple. Sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, en notant $M=(m_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ on définit :

$$\|M\|_1=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}|m_{ij}|,\qquad \|M\|_2=\sqrt{\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}|m_{ij}|^2}=\sqrt{\operatorname{tr}\left(M^\top M\right)},\qquad \|M\|_\infty=\operatorname*{Max}_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}|m_{ij}|$$

Ce sont des normes.

Preuve : comme dans $\mathbb{K}^{np}$

1.3.3 Normes usuelles sur l'espace des polynômes

Exemple. Dans $E = \mathbb{K}[X]$, on définit pour $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \text{ et } N_\infty(P) = \underset{i \in \{0,\dots,n\}}{\text{Max}} |a_i|$$

Ce sont des normes sur E.

Preuve [...]

1.3.4 Normes usuelles sur les espaces de fonctions

Lemme. Pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathrm{Sup}\{kx,\ x \in A\} = k\,\mathrm{Sup}(A)$$

Remarque. *Hormis cette proposition, on ne peut pas faire de calcul directement avec des Sup. On travaille sur le « supande ».*

$k \geq 0$

Preuve : Mque $\mathrm{Sup}\{kx,\ x\in A\} = k\,\mathrm{Sup}\{x,\ x\in A\}$

- Mque $\mathrm{Sup}\{kx,\ x\in A\} \leq k\,\mathrm{Sup}\{x,\ x\in A\}$

Majorer un sup, c'est majorer le "supande" uniformément, ie indép de x.

$\forall x \in A, \quad kx \leq \underbrace{k\,\mathrm{Sup}\{x,\ x\in A\}}_{\text{indép de } x}$

donc $\mathrm{Sup}\{kx,\ x\in A\} \leq k\,\mathrm{Sup}\{x,\ x\in A\}$

par déf de Sup.

- Si $k=0$, c'est évident.

On suppose $k>0$.

$$\mathrm{Sup}\{x,\ x\in A\} = \mathrm{Sup}\left\{\frac{1}{k}kx,\ x\in A\right\}$$
$$\leq \frac{1}{k}\,\mathrm{Sup}\{kx,\ x\in A\}$$

par le 1er point

Définition. Pour X ensemble non vide, on note $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{K}$ qui sont bornées, c'est-à-dire pour lesquelles :

$$\exists M \geqslant 0,\ \forall x \in X,\ |f(x)| \leqslant M$$

Théorème.

$\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel, que l'on peut munir d'une norme en posant :

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in X} |f(x)|$$

Remarque. *Il faut savoir rédiger la démonstration de l'inégalité triangulaire.*

- Existence car f est bornée
- Positivité : $\forall f \in \mathcal{B}$, $\forall x$ $|f(x)| \geq 0$ donc $\|f\|_\infty \geq 0$
- Séparation : Soit $f \in \mathcal{B}$ tq $\|f\|_\infty = 0$

  $\forall x \in X,\quad 0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty = 0$

  donc $f = 0$
- Inég triangulaire Soit $f, g \in \mathcal{B}$

  On veut majorer $\operatorname*{Sup}_{x\in X} |f(x)+g(x)|$

  $\forall x \in X,\ |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$

  $\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

  indep de x
  C'est un majorant de $|f(x)+g(x)|$

  donc $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

  c'est le plus petit des majorants.
- Homogénéité

  $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\, \|f\|_\infty$ par le th. précédent.

Exemple. Sur $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, on définit pour $f \in E$:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x}, \qquad \|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

Ce sont des normes sur E.

$\underline{\|\cdot\|_1}$ $\to$ int nulle d'une fct continue et positive

$\underline{\|\cdot\|_\infty}$ $\to$ Th des bornes atteintes pour justifier l'existence.

1.4 Boules

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et d la distance associée. Pour $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}$, on définit :

- la **boule ouverte de centre** x **et de rayon** $r > 0$:

$$B(a, r) = \{x \in E,\ d(a, x) < r\}$$

- la **boule fermée de centre** x **et de rayon** $r \geqslant 0$:

$$BF(a, r) = \{x \in E,\ d(a, x) \leqslant r\} \qquad \overline{B}(a,r)$$

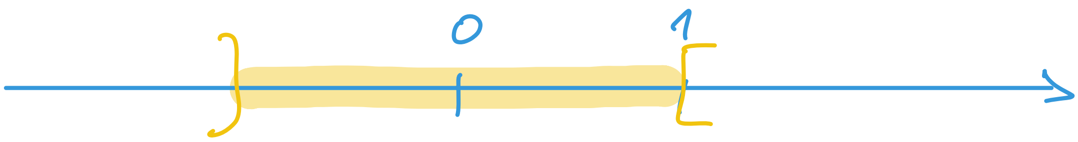
- la **sphère de centre** x **et de rayon** $r \geqslant 0$:

$$S(a, r) = \{x \in E,\ d(a, x) = r\}$$

Remarque. *Un singleton est une boule fermée.*

Exemple. Représenter la boule $B(0, 1)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ muni de sa norme usuelle.

1.1

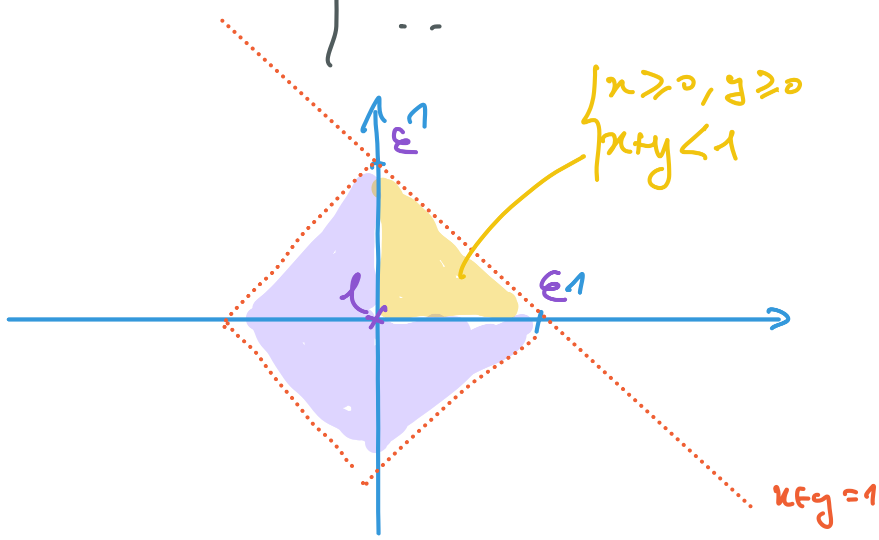


$B(0,1) =]-1, 1[$

Exemple. Représenter la boule $B(0, 1)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de ses normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.

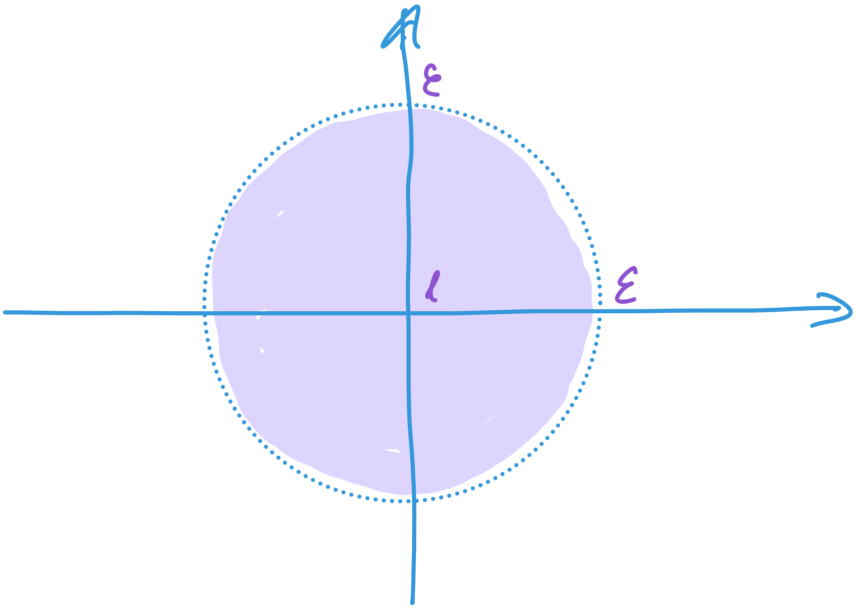
- $\|(x,y)\|_1 < 1 \iff |x| + |y| < 1$

$$\iff \begin{cases} x+y<1 \text{ et } x\geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ \text{ou} \\ -x+y<1 \text{ et } x \leqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0 \\ \text{ou} \\ \dots \end{cases}$$



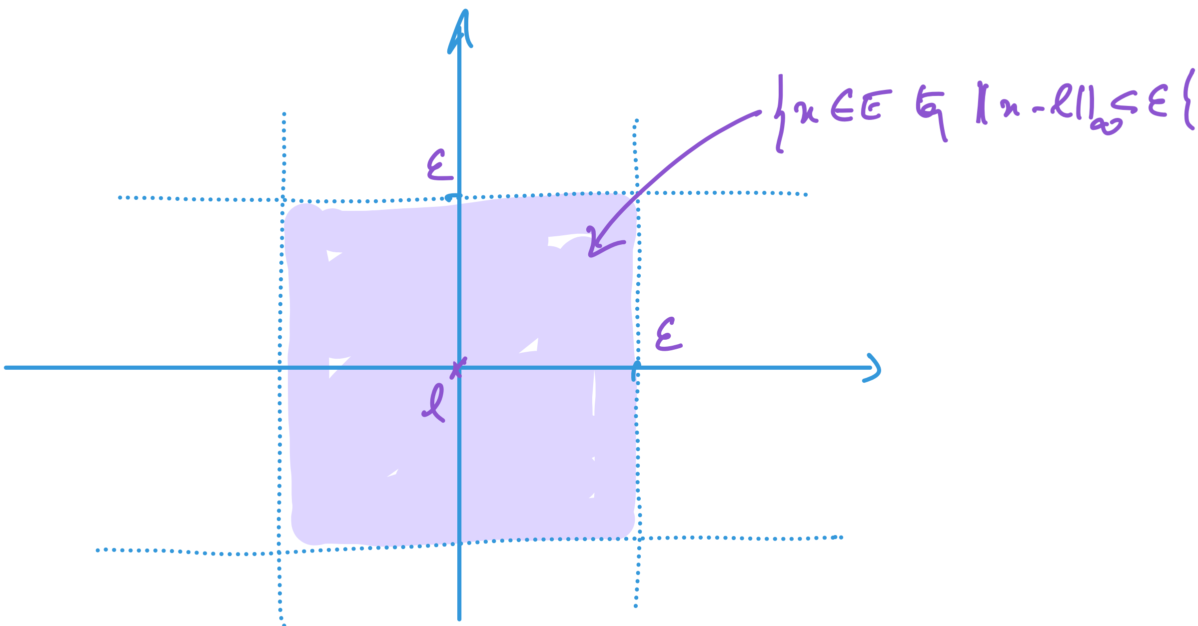
Pour $\|\cdot\|_2$

$$\|(x,y)\|_2 < 1 \iff x^2+y^2 < 1$$



$$\|(x,y)\|_\infty < 1 \iff \max(|x|,|y|) < 1$$

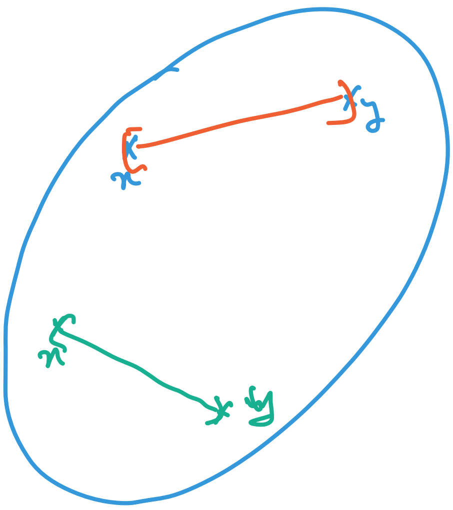
$$\iff \begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{cases}$$



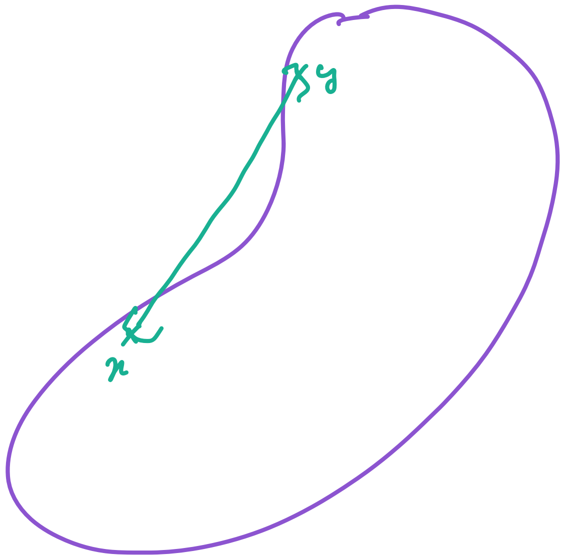
Définition. Soit A une partie de E. On dit que A est **convexe** si et seulement si :

$$\forall x, y \in A,\ \forall t \in [0,1],\ tx + (1-t)y \in A$$

Proposition. Toute boule B est une **partie convexe** de E.



Convexe



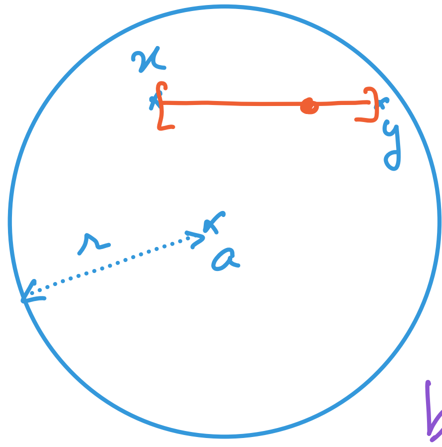
pas convexe

Preuve:

Soit $x, y \in B(a,r)$

Pour $t \in [0,1]$

Mque $tx + (1-t)y \in B(a,r)$



barycentre

$tx + (1-t)y$

$\|(tx + (1-t)y) - a\|$

$= \|tx + (1-t)y - (ta + (1-t)a)\|$

$\leq \|t(x-a)\| + \|(1-t)(y-a)\|$

$= t\,\|x-a\| + (1-t)\,\|y-a\|$ $\quad t \geq 0,\ 1-t \geq 0$

$< t\,r + (1-t)\,r$

$= r$

1.5 Parties bornées

Définition. Une partie A de E est dite **bornée** lorsqu'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in A, \; \|x\| \leqslant M$$

ie $A \subset BF(0, M)$

Proposition.

- Toute intersection de parties bornées est bornée.
- Toute union finie de parties bornées est bornée.

Remarque. *Pour l'intersection, il suffit en fait qu'une seule des parties soit bornée. Pour la réunion, c'est faux dans le cas d'une union infinie.*

Méthode. *Pour montrer que A n'est pas bornée, on exhibe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A telle que $\|x_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.*

Remarque. *Dire qu'une fonction (resp. une suite) à valeurs dans E est bornée, c'est dire que l'ensemble de ses valeurs est borné.*

- Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties bornées, avec $I \neq \emptyset$

  Soit $i_0 \in I$, A_{i_0} bornée donc $\exists M$ tq $A_{i_0} \subset BF(0, M)$

  Alors $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_{i_0} \subset BF(0, M)$

  donc $\bigcap_{i \in I} A_i$ bornée.

- Soit $A_1, \dots, A_n$ des parties bornées de E.

  $\exists M_1, \dots, M_n$ tq $\forall i \quad A_i \subset BF(0, M_i)$

  Soit $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $\exists i_0$ tq $x \in A_{i_0}$

  donc $\|x\| \leq M_{i_0} \leq \max_{i=1}^{n} M_i$

  Donc $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset BF(0, \max_{i=1}^{n} M_i)$

Exemple. Donner un exemple non borné d'union infinie de parties bornées.

Exemple. On considère l'espace $E = \mathbb{K}[X]$, muni des deux normes définies par, si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$:

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{d} |a_k| \qquad N_\infty(P) = \underset{0 \leqslant k \leqslant d}{\text{Max}} |a_k|$$

Que dire de l'ensemble A des polynômes dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1 ?

- $\forall P \in A$, $N_\infty(P) \leq 1$ donc A bornée pour N_∞

- Soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k \in A_n$ $\quad N_1(P_n) = n+1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

donc A non bornée pour N_1

1.6 Espace vectoriel normé produit

Définition. On considère p espaces vectoriels normés (E_i, N_i) sur le corps $\mathbb{K}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$, on définit :

$$N(x) = \underset{1 \leqslant i \leqslant p}{\operatorname{Max}} N_i(x_i)$$

Alors N est une norme sur $E_1 \times \cdots \times E_p$, et $(E_1 \times \cdots \times E_p, N)$ s'appelle **l'espace vectoriel normé produit des** $\big((E_i, N_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant p}$.

Preuve :

- $\forall i \quad N_i(x_i) \geq 0$ donc $N(x) \geq 0$
- Séparation : Soit $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \ldots \times E_p$ tq $N(x) = 0$

  Alors $\forall i \quad 0 \leq N_i(x_i) \leq N(x) = 0$

  donc $N_i(x_i) = 0$

  donc $x_i = 0$ car N_i norme

  Ainsi $x = 0$
- Inég triangulaire : Soit $x = (x_1 \ldots x_p)$

  $y = (y_1 \ldots y_p)$

  $\forall i \in \{1 \ldots p\}, \quad N_i(x_i + y_i) \leq N_i(x_i) + N_i(y_i)$

  $\leq N(x) + N(y)$

  indép de i

  Donc $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$
- Homogénéité

  [...]

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0 \quad u_n \in BF(\ell, \varepsilon)$

2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

2.1 Convergence, divergence

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E^{\mathbb{N}}$ est dite **convergente** si et seulement s'il existe $\ell \in E$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant n_0,\ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

On dit qu'elle est **divergente** sinon.

Proposition. En cas de convergence, ℓ est unique et s'appelle **la limite** de $(u_n)_n$. On note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Remarque. *On trouve aussi la notation $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ que l'on évitera d'utiliser.*

Remarque. *Dans un e.v.n. autre que $\mathbb{R}$, ça n'aurait pas de sens de vouloir définir une limite infinie.*

Preuve :

On suppose que $u_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell_1$ et $u_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell_2$ avec $\ell_1 \neq \ell_2$

ie $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1$ tq $\forall n \geq n_1 \quad \|u_n - \ell_1\| \leq \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2$ tq $\forall n \geq n_2 \quad \|u_n - \ell_2\| \leq \varepsilon$

la déf de $u_n \to \ell_1$ et $u_n \to \ell_2$ avec $\varepsilon = \dfrac{\|\ell_2 - \ell_1\|}{3}$ > 0 par séparation, avec $\ell_1 \neq \ell_2$

d'où l'existence de n_1, n_2 tq

$$\forall n \geq n_1 \quad \|u_n - \ell_1\| \leq \frac{\|\ell_2 - \ell_1\|}{3}$$

$$\forall n \geq n_2 \quad \|u_n - \ell_2\| \leq \frac{\|\ell_2 - \ell_1\|}{3}$$

Alors, pour $n_0 = \max(n_1, n_2)$

$$\begin{aligned}\|\ell_2 - \ell_1\| &= \|\ell_2 - u_{n_0} + u_{n_0} - \ell_1\| \\ &\leq \|\ell_2 - u_{n_0}\| + \|u_{n_0} - \ell_1\| \\ &\leq \frac{2}{3}\|\ell_2 - \ell_1\|\end{aligned}$$

Contradiction car $\|\ell_2 - \ell_1\| > 0$

Proposition. La suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ si et seulement si la suite numérique $(\|u_n - \ell\|)_n$ converge vers 0.

Son intérêt est qu'elle donne un mode de démonstration. Pour montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, on cherche à majorer $\|u_n - \ell\|$ par une quantité qui tend vers 0.

Exemple. Étudier la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $M_n = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} & \frac{1}{n} \\ \mathrm{e}^{-n} & n\sin\frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

Exemple. Dans $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, étudier la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $f_n : t \mapsto t^n$.

- Pour $\|.\|_\infty$

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t\in[0,1[\\ 1 & \text{si } t=1 \end{cases}$$

ne correspond pas à une cv dans un ev. normé !!

Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ alors $f = t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t\in[0,1[\\ 1 & \text{si } t=1 \end{cases}$

défaut de continuité

Par l'absurde, supposons $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|_\infty} f$

$\forall t \in [0,1]$ $\quad |f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t)$

donc $f : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t\in[0,1[\\ 1 & \text{si } t=1 \end{cases}$

Absurde car $f \notin E$

Pour $\|.\|_1$ $\qquad \|g\|_1 = \int_0^1 |g(t)|\,dt$

Mque $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|_1} 0$

$$\|f_n - 0\|_1 = \int_0^1 |t^n|\,dt$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\cdot\|_1} 0$

Rmq : $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

2.2 Suites bornées

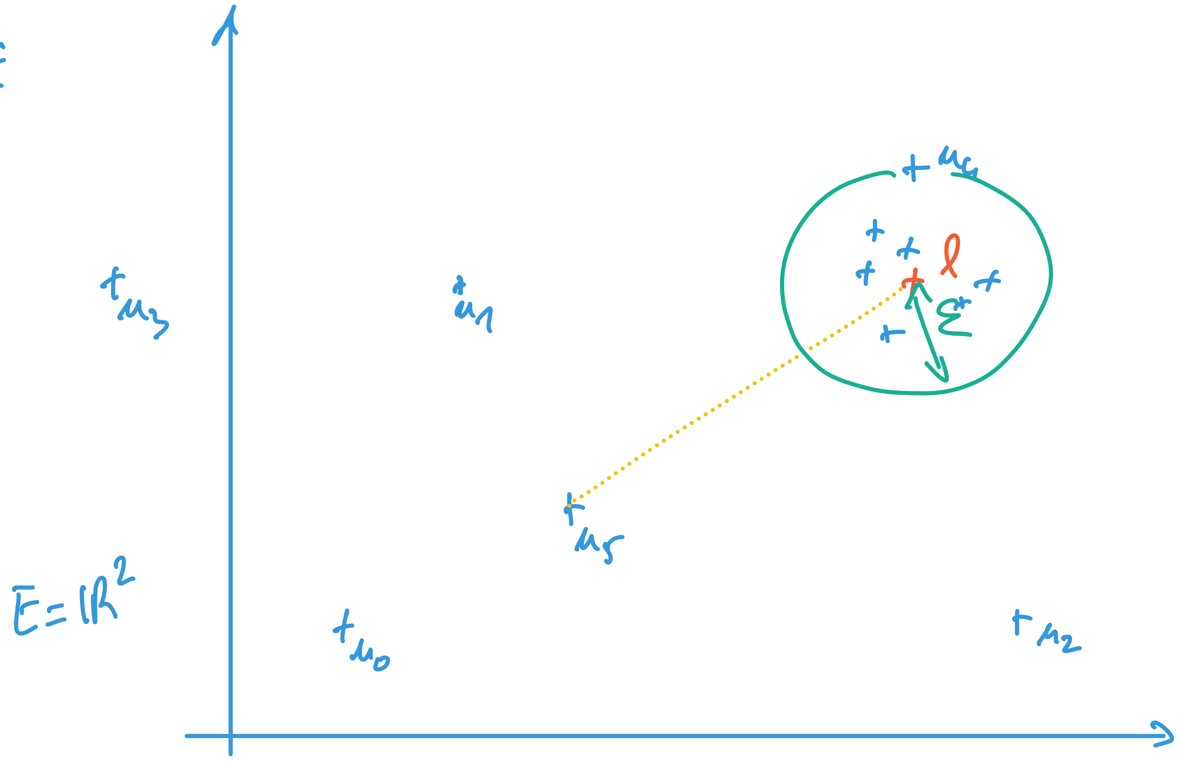
Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leqslant M$$

$\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ partie bornée de E.

Proposition. Toute suite convergente est bornée.

Preuve:



Cv déf de $u_n \to \ell$ avec $\varepsilon = 1$

$\exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$, $\|u_n - \ell\| \leq 1$

Posons $M = \mathrm{Max}\left(\|u_0\|, \|u_1\|, \dots, \|u_{n_0-1}\|, \|\ell\|+1\right)$

Pour $n \in \mathbb{N}$:

* si $n < n_0$ $\quad \|u_n\| \leq M$
* si $n \geq n_0$ $\quad \|u_n\| = \|u_n - \ell + \ell\|$

$$\leq \|u_n - \ell\| + \|\ell\|$$
$$\leq 1 + \|\ell\| = M$$

2.3 Opérations sur les suites convergentes

Proposition. Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'. Soit α et β deux scalaires. Alors la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)_n$ est convergente, de limite $\alpha\ell + \beta\ell'$.

Corollaire. L'ensemble des suites convergentes est donc un espace vectoriel.

Proposition. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\|u_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|\ell\|$.

La réciproque est bien sûr fausse.

$$\|(\alpha u_n + \beta v_n) - (\alpha\ell + \beta\ell')\|$$
$$= \|\alpha(u_n - \ell) + \beta(v_n - \ell')\|$$
$$\leq |\alpha|\,\|u_n - \ell\| + |\beta|\,\|v_n - \ell'\|$$
$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On suppose $u_n \to \ell$

$$\big|\,\|u_n\| - \|\ell\|\,\big| \leq \|u_n - \ell\|$$
$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2.4 Convergence par coordonnées des suites à valeurs dans un espace vectoriel produit

Définition. Soit E est un espace vectoriel de dimension finie p, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E. À n fixé, u_n s'écrit de façon unique sous la forme :

$$u_n = u_n^1 e_1 + u_n^2 e_2 + \cdots + u_n^p e_p$$

où $(u_n^1, u_n^2, \ldots, u_n^p)$ est le p-uplet des coordonnées de u_n dans la base $\mathcal{B}$.
Pour chaque $k \in \{1, \ldots, p\}$, la suite numérique $(u_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **k-ème suite coordonnée** de $(u_n)_n$ dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème.

Avec les notations précédentes, $(u_n)_n$ converge si et seulement si les p suites-coordonnées $(u_n^k)_n$ convergent.
Dans ce cas, en notant $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et, pour tout k, $u_n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_k$, on a :

$$\ell = \ell_1 e_1 + \ell_2 e_2 + \cdots + \ell_p e_p$$

Preuve: E de dim finie, les normes sont toutes équivalentes,

on choisit $\|.\|_\infty$:

Pour $x \in E$, où $x = x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1}^{p} |x_i|$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $k \in \{1, \ldots, p\}$

$$|u_n^k - \ell_k| \leq \|u_n - \ell\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $u_n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_k$

$\boxed{\Leftarrow}$

Pour $n \in \mathbb{N}$ $\|u_n - \ell\|_\infty = |u_n^{k_0} - \ell_{k_0}|$

où k_0 indice où le max est réalisé

k_0 dépend de n

$\cancel{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

$$\leq \sum_{k=1}^{p} |u_n^k - \ell_k|$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Comme somme de p termes de limite nulle.

Rmq : On utilise ce théorème très naturellement !

<u>**Exemple.**</u> Étudier la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n & \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} & \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix}$$

On travaille en coord. dans la base canonique.

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e^{n\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$\longrightarrow e^{-1}$$

de même pour les autres coordonnées. [...]

Proposition. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E = E_1 \times \cdots \times E_p$. On peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \left(x_n^1, \ldots, x_n^p\right)$$

où les suites $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les suites composantes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
La suite $(x_n)_n$ converge vers $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p)$ si et seulement si :

$$\forall k \in \{1, \ldots, p\},\ x_n^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_k$$

3 Comparaison des normes

3.1 Normes équivalentes

Définition. Deux normes N_1 et N_2 sont dites **équivalentes** si et seulement s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E,\ \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$$

Remarque. *Cela revient à dire qu'il existe $\beta, \gamma > 0$ tels que :*

$$N_2 \leqslant \beta N_1 \text{ et } N_1 \leqslant \gamma N_2$$

Remarque. *C'est une relation d'équivalence.*

Exemple. Dans $\mathbb{K}^p$, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes.

Théorème (spoiler).

Si E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Soit $x \in \mathbb{K}^p$.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1}^{p} |x_i|$$

- $$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{p} \|x\|_\infty = p\,\|x\|_\infty$$

- $$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \|x\|_\infty^2} = \|x\|_\infty \sqrt{p}$$

- $$\|x\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |x_i| = |x_{i_0}| \leq \sum_{i=1}^{p} |x_i|$$ pour i_0 indice d'un des max

$$= \|x\|_1$$

- $$\|x\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |x_i|$$
$$= |x_{i_0}| \qquad \text{pour } i_0 \text{ indice d'un des max}$$
$$= \sqrt{|x_{i_0}|^2}$$
$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2}$$
$$= \|x\|_2$$

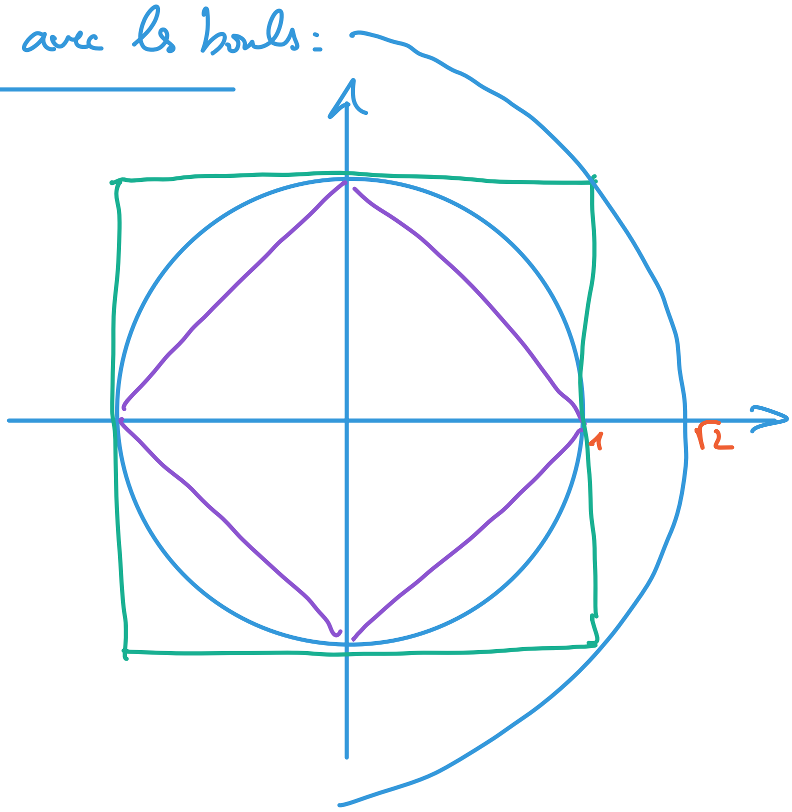
Bref :
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq p\,\|x\|_\infty$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{p}\,\|x\|_\infty$$

Donc $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes

$\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ ———

par transitivité, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ équivalentes.

Dans $\mathbb{R}^2$, lien avec les boules :



$$B_2(0,1) \subset B_\infty(0,1) \subset B_2(0,\sqrt{2})$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{2}\,\|x\|_\infty$$

3.2 Invariance du caractère borné, de la convergence

Proposition. Si deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes, alors :

- $A \subset E$ est bornée pour N_1 si et seulement A est bornée pour N_2
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour N_1 si et seulement si elle converge vers ℓ pour N_2.

Preuve: On suppose $\exists \alpha, \beta > 0$ tq $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$

- On suppose $\exists M_1$ tq $\forall x \in A$ $N_1(x) \leq M_1$

  alors $\forall x \in A$ $N_2(x) \leq \beta N_1(x)$
  $\leq \beta M_1$

  donc A est bornée pour N_2.

- On suppose $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_1} \ell$.

  ie $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_1$ tq $\forall n \geq n_1$ $N_1(u_n - \ell) \leq \varepsilon$

  Mque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_2} \ell$ ie $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_2$ tq $\forall n \geq n_2$ $N_2(u_n - \ell) \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$

pour avoir $N_2(u_n - \ell) \leq \varepsilon$

il suffit d'avoir $\beta N_1(u_n - \ell) \leq \varepsilon$

On applique la déf de $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_1} \ell$ avec $\dfrac{\varepsilon}{\beta}$.

D'où $\exists n_1$ tq $\forall n \geq n_1$ $N_1(u_n - \ell) \leq \dfrac{\varepsilon}{\beta}$

Donc $\forall n \geq n_1$ $N_2(u_n - \ell) \leq \beta N_1(u_n - \ell)$
$\leq \varepsilon$

Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_2} \ell$.

3.3 Comparer deux normes

Méthode. *Comparer N_1 et N_2, c'est regarder s'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_2$ et regarder s'il existe $\beta > 0$ tel que $N_2 \leqslant \beta N_1$.*

- *Pour montrer l'existence de α :*
  - *Si E est de dimension finie, on affirme l'existence de α (sans connaître sa valeur)*
  - *Sinon, on part de $N_1(x)$ que l'on cherche à majorer en faisant apparaître $N_2(x)$. Une valeur possible du coefficient α devrait apparaître.*
- *Pour montrer qu'un tel α n'existe pas, on cherche une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E telle que, par exemple, $N_1(x_n)$ soit constante et $N_2(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ou alors telle que $N_1(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ tandis que $N_2(x_n)$ reste constante.*
  Si $E = \mathbb{K}[X]$, la suite ne peut pas rester dans un sous-espace de dimension fini $\mathbb{K}_p[X]$.

Exemple. Dans $E = \mathbb{K}[X]$, montrer que les deux normes N_1 et N_2 précédentes ne sont pas équivalentes.

$$\neg\left(\exists \alpha \quad \forall x \quad N_1(x) \leq \alpha N_2(x)\right)$$

$$\forall \alpha \quad \exists x \quad N_1(x) > \alpha N_2(x)$$

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$$

$$N_\infty(P) = \max_{i=0}^{n} |a_i|$$

- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit i_0 tq $N_\infty(P) = |a_{i_0}|$

$$N_\infty(P) = |a_{i_0}| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i| = N_1(P)$$

- Mq $\nexists \alpha$ tq $N_1(P) \leq \alpha N_\infty(P) \quad \forall P$

Soit $P_n = \sum_{i=0}^{n} X^i$ $\qquad N_1(P_n) = n+1 \longrightarrow +\infty$

$$N_\infty(P_n) = 1$$

donc N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

• Rmq : La partie $A = \{$ pol à coeff 0 ou 1 $\}$ est bornée pour N_∞ et pas pour N_1

donc N_1 et N_∞ pas équivalentes

Une convergence qui dépend du choix de la norme

420.3

On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$. Pour $f \in E$, on note :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ et } N(f) = \int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que N est une norme sur E.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} n(1-nt) & \text{si } t \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } t \in]1/n, 1] \end{cases}$$

Calculer $N(f_n)$ et vérifier que, pour la norme N, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(c) Calculer $\|f_n\|_1$. Qu'en conclure ?

(a) • Existence

• Positivité

• Séparation ⟵

• Inég triangulaire

• Homogénéité

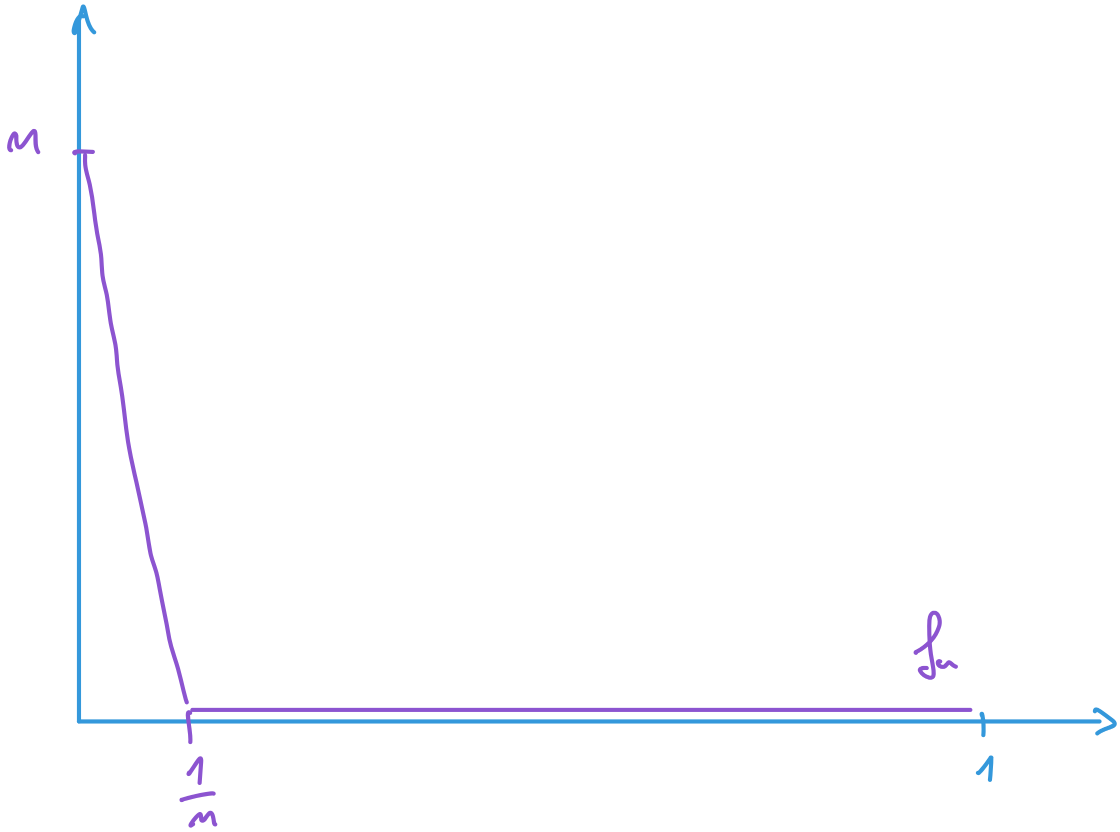
Soit $f \in E$ tq $N(f) = 0$ ie $\int_0^1 t|f(t)|\,dt = 0$

Intégrale nulle d'une fonction continue positive

donc $\forall t \in [0,1]$, $t\,f(t) = 0$

donc $\forall t \in]0,1]$ $f(t) = 0$

Or f continue en 0 donc $\underline{f(t) = 0 \ \forall t \in [0,1]}$



c) $\|f_n\|_1 = n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) $N(f_n) = \int_0^{1/n} nt - n^2 t^2 \, dt$

$$= \left[\frac{n}{2} t^2 - \frac{n^2}{3} t^3 \right]_0^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n}$$

$$= \frac{1}{6n}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{N} 0$

$\|f_n - 0\|_1 \not\to 0$

$N(f_n - 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\|.\|_1$ et N ne sont pas équivalentes.

420.8

Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, et N l'application définie par :

$$N(x_1, \ldots, x_n) = a_1|x_1| + \cdots + a_n|x_n|$$

À quelle(s) condition(s) sur $a_1, \ldots, a_n$ l'application N définit-elle une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Analyse

On suppose que N est une norme.

En particulier :

- $\underline{N \text{ positive}}$ donc $0 \leq N(1, 0, \ldots, 0) = a_1$

  et $0 \leq N(0, 1, 0 \ldots 0) = a_2$

  $\vdots$

  $0 \leq N(0, \ldots, 0, 1) = a_n$

- $\underline{\text{Séparation}}$ Si $N(x) = 0$ alors $x = 0$

  Seul le vecteur nul a une norme nulle.

  $N(1, 0, \ldots, 0) \neq 0$ donc $a_1 \neq 0$

  de même $a_2 \neq 0, \ldots, a_n \neq 0$

Synthèse : On suppose $a_1 > 0 \dots a_n > 0$

Mq N est une norme :

- positivité
- séparation : Soit $x = (x_1 \dots x_n)$ tq $N(x) = 0$

  ie $a_1|x_1| + \dots + a_n|x_n| = 0$

  somme nulle de termes positifs

  donc $\forall i \quad a_i|x_i| = 0$

  donc $|x_i| = 0$ car $a_i \neq 0$

  Donc $x = 0$

- inég triangulaire
- homogénéité.

420.15

On considère $\mathcal{B}$ l'espace des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(a) Soit $a = (a_n)_n$ une suite réelle. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur la suite a l'application :

$$N_a \, : \, x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |x_n|$$

définit une norme sur $\mathcal{B}$?

(b) Comparer dans ce cas N_a et $\|\cdot\|_\infty$.