DM.

SCEI

Pendant les vacances

Dénombrement

étiquette

1 Ensembles finis

1.1 Définition

Définition. On dit qu'un ensemble E est **fini** lorsqu'il est vide, ou qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit en bijection avec $\{1, \ldots, n\}$.
Dans le premier cas, on définit $\mathrm{Card}(E) = 0$. Dans le second cas, n est unique et on définit $\mathrm{Card}(E) = n$.

1.2 Propriétés

Proposition. Deux ensembles finis ont le même cardinal si et seulement s'il existe une bijection entre ces ensembles.

Remarque. *En général, on n'exhibe pas explicitement cette bijection. Mais on décrit les deux ensembles en bijection par une formulation telle que :*

« Définir [tel élément de A], c'est définir [tel élément de B] et [tel élément de C] »

qui signifie que A et $B \times C$ sont de même cardinaux.

Proposition. Soit E un ensemble fini, et $A \subset E$. Alors :

- A est fini et $\text{Card}(A) \leqslant \text{Card}(E)$
- $A = E \iff \text{Card}\, A = \text{Card}\, E$.

Proposition. Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal, et $\varphi : E \to F$. Alors :

$$\varphi \text{ bijective} \iff \varphi \text{ injective} \iff \varphi \text{ surjective}$$

1.3 Exemples de cardinaux

Proposition. Soit E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et :

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E)\,\mathrm{Card}(F)$$

Corollaire. Si $E_1, E_2, \ldots, E_p$ sont des ensembles finis, alors $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ est fini et :

$$\mathrm{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = \mathrm{Card}(E_1)\,\mathrm{Card}(E_2) \ldots \mathrm{Card}(E_p)$$

Proposition. Soit E et F deux ensembles finis. Alors $E \cup F$ est fini et :

- si l'union est disjointe, $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F)$;
- en général, $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$.

Corollaire. Si $E_1, E_2, \ldots, E_p$ sont des ensembles finis deux à deux disjoints, alors $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_p$ est fini et :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Card}(E_i)$$

Définir $\varphi : E \to F$, c'est définir la famille

$$(\varphi(x))_{x \in E}$$

Les applications $E \to F$ sont donc les $*$-uplets d'éléments de F indexés par E

2 Dénombrement d'applications, de parties d'un ensemble

2.1 Nombre d'applications

Théorème.

Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n. On note $\mathcal{F}(E, F) = F^E$ l'ensemble des applications : $E \to F$.
Alors F^E est fini et :

$$\mathrm{Card}(F^E) = \cancel{p^n} = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}\, E} \quad n^p$$

$$E \xrightarrow{\varphi} F$$

$p \qquad\qquad n$

$x_1 \qquad\qquad y_1$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$x_p \qquad\qquad y_n$

Preuve : Définir $\varphi \in F^E$, c'est définir :

- l'image $\varphi(x_1)$ dans F : n choix

et

- l'image $\varphi(x_2)$ dans F : n choix

$\vdots$

- l'image $\varphi(x_p)$ dans F : n choix

Donc $\mathrm{card}(F^E) = n \times n \times \dots n = n^p$.

2.2 Nombre de parties d'un ensemble

Théorème.

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors l'ensemble de ses parties, $\mathcal{P}(E)$, est fini, et :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n = 2^{\mathrm{Card}(E)}$$

Preuve :

On note $E = \{x_1, \dots, x_n\}$

Définir $A \in \mathcal{P}(E)$

c'est décider si

- x_1 est dans A ou pas — 2 choix

et

- x_2 est dans A ou pas — 2 choix

⋮

- x_n est dans A ou pas — 2 choix

Donc $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$

2.3 Fonction indicatrice

Définition. Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle **fonction indicatrice de** A (ou parfois fonction caractéristique de A) l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & E & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Proposition. L'application : $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \{0,1\}^E \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$ est une bijection.

p-arrangement $\quad A_n^p$

3 Listes, nombre d'injections

Définition. Soit E un ensemble. On appelle p-**liste d'éléments distincts de** E tout p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E deux à deux distincts.

Proposition. Si $\mathrm{Card}(E) = n$ et $p \leqslant n$, le nombre de p-listes d'éléments distincts de E est :

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Preuves

Définir une p-liste d'éléments distincts de E,

c'est définir x_1 (dans E) $\quad$ n choix

puis x_2 (dans $E \setminus \{x_1\}$) $\quad$ $(n-1)$ choix

$\vdots$

puis x_p (dans $E \setminus \{x_1, x_2 \dots x_{p-1}\}$) $\quad$ $(n-p+1)$ choix

Donc il y a $\underbrace{n(n-1)\dots(n-p+1)}_{= \frac{n!}{(n-p)!}}$ p-listes d'éléments distincts.

Proposition. Soit E et F deux ensembles finis, de cardinaux respectifs p et n. Le nombre d'applications injectives $E \to F$ est :

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Définir φ injection de E dans F, où $E = \{x_1 \dots x_p\}$, $F = \{y_1 \dots y_n\}$

c'est définir le p-uplet des images

$$(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_p))$$

c'est-à-dire une p-liste d'éléments distincts de F.

Corollaire. Si E est un ensemble fini de cardinal n, alors :

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{S}(E)) = n!$$

où $\mathfrak{S}(E)$ désigne l'ensemble des permutations de E, c'est-à-dire les bijections : $E \to E$.

$\mathfrak{S}(E) = \{$ ensemble bijections $E \to E \}$

$= \{$ ensembles des injections $E \to E \}$

de cardinal $\dfrac{n!}{(n-n)!} = n!$

4 Combinaisons

de cardinal n.

C_n^p

Définition. Soit E un ensemble. On appelle p-**combinaison** une partie de E à p éléments.

Définition. Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on appelle p **parmi** n et on note $\binom{n}{p}$ le nombre de p-combinaisons d'un ensemble à n éléments, c'est-à-dire le nombre de parties à p éléments.

Remarque: dans une p-liste, l'ordre des éléments compte.

dans une p-combinaison, non.

Proposition. Lorsque $0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Remarque. *Il est maladroit de systématiquement remplacer un coefficient binomial par son expression factorielle.*

Preuve: Définir une p-liste d'éléments distincts de E, $\qquad \dfrac{n!}{(n-p)!}$

c'est choisir p éléments dans E $\qquad \|$

(une p-combinaison de E) $\qquad \binom{n}{p}$

et choisir un ordre pour ces p-éléments $\qquad \times$

(une permutation de cette partie) $\qquad p!$

nb de parties à 0 élts dans un ens à n éléments

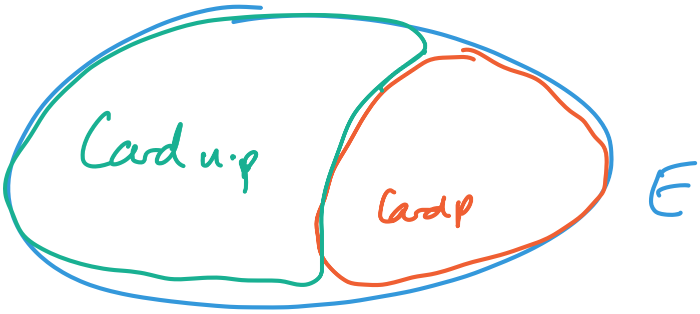
Proposition.

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- Pour $p > n$ ou $p < 0$, $\binom{n}{p} = 0$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ *(formule de Pascal)*
- $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ pour $n, p \geqslant 1$
- $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$

$\binom{n}{1}$ = nb de singletons dans $\{1..n\}$ = n

Définir une partie à p élts dans E de cardinal n,

c'est définir son complémentaire (qui a $n-p$ élts)



- $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$

M1 : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^p \, 1^{n-p}$

$$= (1+1)^n$$

$$= 2^n$$

M2 E de cardinal n. $\qquad 2^n = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(E))$

Définir une partie de E,

c'est choisir un p dans $[\![0,n]\!]$

puis choisir une partie de E à p éléments

$$\mathcal{P}(E) = \bigcup_{\substack{p=0 \\ \text{distincte}}}^{n} \{\text{parties de E à } p \text{ éléments}\}$$

donc $\displaystyle 2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$

- $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ pour $n, p \geqslant 1$ $\qquad p \leq n$

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1} \quad \leftarrow \text{dans } \mathbb{N}$$

(divisibilité, arithmétique)

M1 : $\displaystyle p \cdot \binom{n}{p} = p \cdot \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$ $\qquad p \geqslant 1$

$$= \frac{n!}{(p-1)!\,(n-p)!}$$

$$= n \cdot \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!}$$

$$= n \binom{n-1}{p-1}$$

M2 On dénombre les couples (A, x) où A partie de E à p éléments et $x \in A$.

- Définir un tel couple, c'est

  choisir x dans E (n choix)

  puis compléter A en choisissant $p-1$ éléments dans $E \setminus \{x\}$ $\left(\binom{n-1}{p-1}\right.$ choix$\left.\right)$

- Définir un tel couple, c'est

  choisir A $\left(\binom{n}{p}\right.$ choix$\left.\right)$

  puis choisir x dans A (p choix)

Donc $n \binom{n-1}{p-1} = p \binom{n}{p}$

M3. $(X+1)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} X^p$

On dérive :

$$n(X+1)^{n-1} = \sum_{p=1}^{n} \overbrace{\binom{n}{p} p}\, X^{p-1}$$

$$\parallel$$

$$n \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} X^{p}$$

$$\parallel$$

$$\sum_{p=1}^{n} \underbrace{n \binom{n-1}{p-1}} X^{p-1}$$

- $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ *(formule de Pascal)*

M1 $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$

$$= \frac{n!}{p!\,(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!\,(n-p-1)!}$$

$$= \frac{n!\,(p+1) + n!\,(n-p)}{(p+1)!\,(n-p)!}$$

$$= \frac{n!\,[n+1]}{(p+1)!\,(n-p)!}$$

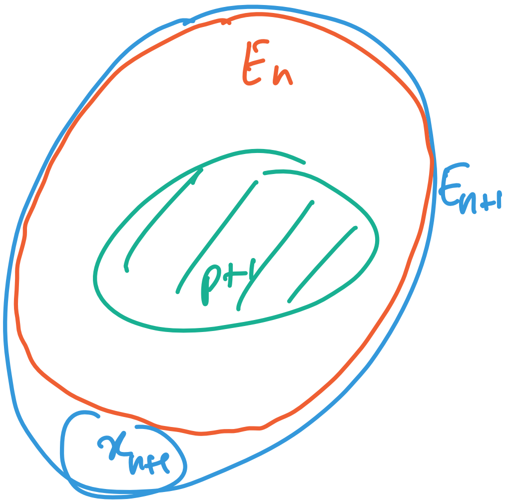
$$= \binom{n+1}{p+1}$$

M2 Définir une partie à $(p+1)$ éléments dans un ensemble à $(n+1)$ éléments $(x_1 \dots x_n, x_{n+1})$

c'est : définir une partie à p éléments dans $\{x_1 \dots x_n\}$ et ajouter x_{n+1}

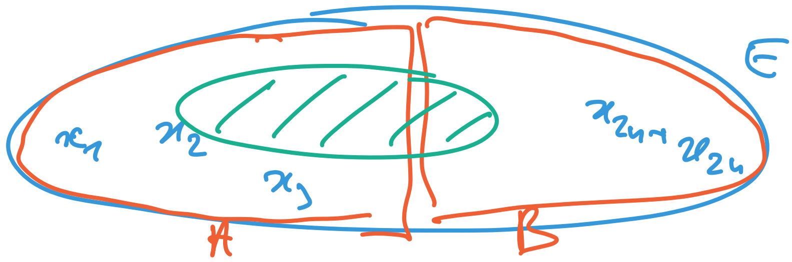
ou

définir une partie à $(p+1)$ éléments dans $\{x_1 \dots x_n\}$



Donc $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$

No. 1



Définir une partie à n éléments dans $E=\{\underbrace{x_1 \dots x_n}_{A} \; \underbrace{x_{n+1} \dots x_{2n}}_{B}\}$

c'est choisir n éléments dans A et 0 dans B

ou

$n-1$ —— A et 1 —— B

ou

$n-2$ —— A et 2 —— B

⋮

ou

$n-k$ —— A et k —— B

⋮

0 —— A et n —— B

Donc
$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \times \binom{n}{k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$