

Pour je: 831.27, 840.1

Fonctions génératrices

Sauf mention contraire, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

On s'intéresse dans ce chapitre uniquement aux variables aléatoires qui sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Typiquement, celles qui apparaissent dans des situations de comptage.

$$\text{Si } X \text{ } \xi \text{ } X(\omega) = \{-1, 1\}$$

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

→ pas de fonction génératrice.

1 Définition

Lemme. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. La série entière :

$$\sum_{n \geq 0} P(X = n) t^n$$

converge normalement sur $[-1, 1]$ (et même $DF(0, 1)$ si on considère la variable complexe), et son rayon de convergence satisfait : $R_X \geq 1$.

Définition. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit la **fonction génératrice** de X par :

$$G_X : t \mapsto \sum_{n \geq 0} P(X = n) t^n$$

Remarque. $G_X(1) = 1$ et $G_X(t) = E(t^X)$ par la formule de transfert.

• $|P(X=n)t^n| \leq P(X=n) \quad \forall t \in [-1, 1]$

↑
tg d'une série cv, de somme 1.

donc $\sum P(X=n)t^n$ converge absolument $\forall t \in [-1, 1]$.

$$R_X \geq 1$$

• $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n \quad \forall t \in [-1, 1]$

$$G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1$$

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \in X(\Omega)}} t^n P(X=n) \\ &= E(t^X) \quad \text{par transfert} \end{aligned}$$

Proposition. La loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice.

La donnée de G_X suffit pour donner la loi de X .

Par exemple: Si $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)} \quad \forall t \in [-1, 1]$

donc $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Preuve: G_X est développable en série entière,

et ce développement est :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n \quad \forall t \in [-1, 1]$$

l'unicité des coeff d'une série entière

donc: $P(X=n) = \text{coeff devant } t^n$.

Fonctions génératrices des lois usuelles.

- Si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors $G_X(t) = \frac{1}{n}(t + t^2 + \dots + t^n)$.
- Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $G_X(t) = pt + (1 - p)$.
- Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $G_X(t) = (pt + (1 - p))^n$.
- Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1 - p)t}$.
- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

• $X \sim \mathcal{B}(p)$

$$G_X(t) = E(t^X)$$

$$= \sum_{m \in X(\Omega)} t^m P(X=m)$$

$$= t^0 P(X=0) + t^1 P(X=1)$$

$$= (1-p) + tp$$

• $X \sim \mathcal{G}(p)$

$$G_X(t) = E(t^X)$$

$$\forall t \in [-1, 1]$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} t^n P(X=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} t^n p (1-p)^{n-1}$$

série géométrique

$$= pt \cdot \frac{1}{1 - t(1-p)} \quad \frac{pt}{1 - qt}$$

$$\text{où } q = 1-p$$

- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$G_X(t) = E(t^X)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda t}$$

$$= e^{\lambda(t-1)}$$

2 Propriétés, régularité

Proposition. On conserve les notations précédentes. G_X est continue sur $[-1, 1]$ (et même sur $DF(O, 1)$ si on considère la variable complexe).

- $R_X \geq 1$

et G_X est continue sur $] -R_X, R_X [$

- On note $f_n(t) = P(X=n)t^n$

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$$

$$|f_n(t)| = P(X=n) |t^n| \quad \forall t \in [-1, 1]$$

$$\leq P(X=n) \quad \text{indépendant de } t$$

t -g série convergente

donc $\sum f_n$ cc normalement, donc uniformément sur $[-1, 1]$. Les f_n sont continues sur $[-1, 1]$, par transfert de continuité, G_X continue sur $[-1, 1]$.

Proposition. On conserve les notations précédentes.

X admet une espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 (à gauche).

Dans ce cas :

$$E(X) = G'_X(1)$$

Preuve:

• ~~Formellement:~~ $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n$
Si $R_X > 1$
 $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) n t^{n-1}$
en 1 $G'_X(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P(X=n)$
 $= E(X)$

• Si $R=1$, il faut être plus précis.

$\Rightarrow$ On suppose X d'espérance finie

(ie $E(X) < +\infty$ car X a valeurs positives)

Alors G_X est dérivable en 1 sur $[0,1]$

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \text{ où } f_n(t) = P(X=n) t^n$$

• $\sum f_n$ converge sur $[0,1]$

• les f_n sont $\mathcal{C}^1$ et $f'_n(t) = 0$ si $n=0$
 $n P(X=n) t^{n-1}$ sinon

• a-t-on $\sum f'_n$? $\forall t \in [0,1]$

$$|f'_n(t)| = n P(X=n) t^{n-1}$$

$$\leq n P(X=n)$$

$\uparrow$ majoré par la série $\sum n P(X=n)$

$$\text{car } E(X) = \sum_{n \geq 1} n P(X=n) < +\infty$$

Donc $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, 1]$. Donc G_X est dérivable sur $[0, 1]$, et $\forall t \in [0, 1]$

$$G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P(X=n) t^{n-1}$$

$$\text{en particulier: } G'_X(1) = E(X)$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose G_X dérivable en 1 (à gauche)

$$\forall t \in [0, 1[\quad G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P(X=n) t^{n-1}$$

$$\text{en } t=1 \quad G'_X(1) \text{ existe}$$

$$\text{Rien ne dit que } G'_X(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P(X=n) 1^{n-1}$$

$$E(X) = \sum_{\substack{n=0 \\ \dots 1}}^{+\infty} n P(X=n)$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n P(X=n) t^{n-1} \right)$$

Alors $\sum n P(X=n)$ converge et $\left(\sum_{n=0}^N n P(X=n) \right)_N$
est majorée (étude d'une série à termes ≥ 0)

$$\bullet \forall t \in [0, 1[\quad G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P(X=n) t^{n-1}$$

$G'_X(t)$ a limite finie pour $t \rightarrow 1$, notée l .

Si non: G'_X est croissante car $t \mapsto t^{n-1}$ l'est

donc $G'_X \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} +\infty$ par limite monotone

Or G_X est continue en 1

donc par limite de la dérivée

G_X non dérivable en 1

(mais tangente verticale au point
d'abscisse 1)

Donc G'_X est bornée sur $[0, 1[$:

$$\exists M \quad \forall t \in [0, 1[$$

$$0 \leq G'_X(t) \leq M$$

Fixons N

$$\forall t \in [0, 1[$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N n P(X=n) t^{n-1} &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} n P(X=n) t^{n-1} \\ &\quad \text{(on ajoute des termes } \geq 0 \text{)} \\ &= G'_X(t) \\ &\leq M \end{aligned}$$

À la limite, pour $t \rightarrow 1$ (N fixé)

$$\sum_{n=1}^N n P(X=n) \leq M$$

On a trouvé M & $\forall N \quad \sum_{n=1}^N n P(X=n) \leq M$

Donc la suite croissante $\left(\sum_{n=1}^N n P(X=n) \right)_N$ est majorée, donc convergente et $E(X) < +\infty$.

Donc, par $\boxed{\Rightarrow}$, $E(X) = G'_X(1)$.

Exemple:

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\uparrow$ Développable en série entière, rayon 1.

G_X est dérivable en 1

$$\text{et } G'_x(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)} \quad \text{donc } G'_x(1) = \lambda$$

$$\text{Donc } E(X) = \lambda$$

$$\text{Soit } X \sim g(p)$$

$$G_x(t) = \frac{p^t}{1 - (1-p)t} \quad q = 1-p$$

développable en série entière sur $] -\frac{1}{q}, \frac{1}{q} [$
 donc G_x est dérivable sur $] -\frac{1}{q}, \frac{1}{q} [$ donc
 en 1 ($\frac{1}{q} > 1$)

$$G'_x(t) = \frac{p(1-qt) - p^t(-q)}{(1-qt)^2}$$

$$\begin{aligned} E(X) = G'_x(1) &= \frac{p^2 + pq}{p^2} \\ &= 1 + \frac{p - p^2}{p^2} \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Proposition. On conserve les notations précédentes.

X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1 (à gauche).

Dans ce cas :

$$G_X''(1) = E(X(X-1))$$

Remarque. De cette égalité, il faut savoir retrouver rapidement l'expression de la variance à l'aide de G :

$$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$$

Exemple. Retrouver par les fonctions génératrices espérance et variance des lois usuelles.

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \quad V(X) ?$$

$$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)} \quad \text{et 2 fois dérivable sur } \mathbb{R} \text{ (a 1)}$$

$$G_X'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$$

$$G_X''(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$$

$$\text{donc } V(X) = \underbrace{G_X''(1)}_{E(X(X-1))} + \underbrace{G_X'(1)}_{E(X)} - \underbrace{(G_X'(1))^2}_{(E(X))^2}$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$= \lambda$$

3 Fonction génératrice et somme

Proposition. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $t \in [-1, 1]$

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t)$$

où $G_X(t) G_Y(t)$ est le produit de Cauchy des deux séries entières.

Proposition. Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si elles sont indépendantes, alors pour tout $t \in [-1, 1]$

$$G_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t) \dots G_{X_n}(t)$$

Preuve: Pour $t \in [-1, 1]$:

$$G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X+Y=n) t^n$$

$$(X+Y=n) = \bigcup_{\substack{k=0 \\ \text{au plus}}}^n (X=k, Y=n-k)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n P(X=k, Y=n-k) \right) t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \underbrace{P(X=k)}_{a_k} \underbrace{P(Y=n-k)}_{b_{n-k}} \right) t^n$$

par indépendance
de X et Y

On reconnaît le produit de Cauchy

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n) t^n \right)$$

$$= G_X(t) G_Y(t)$$

12

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= E(t^{X+Y}) \\ &= E(t^X t^Y) \\ &= E(t^X) E(t^Y) \end{aligned}$$

car t^X, t^Y indépendants,

car X, Y indépendants

$$= G_X(t) G_Y(t)$$

Exemple. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ . Alors :

$$X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$$

Preuve: $\forall t \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= G_X(t) \times G_Y(t) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ indep} \\ &= e^{\lambda(t-1)} \times e^{\mu(t-1)} \\ &= e^{(\lambda+\mu)(t-1)} \end{aligned}$$

Oh! on reconnaît la f.g. génératrice
de $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$

donc $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

