Pour me : 831.34, 831.33

Algèbre ? Analyse ? Probabilités ? (~~Géométrie~~ ?)

Conseil de classe : demain à 12h.

Le 5 janvier 2026, 7h55 : math.

4 Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres

4.1 Inégalité de Markov

Inégalité de Markov.

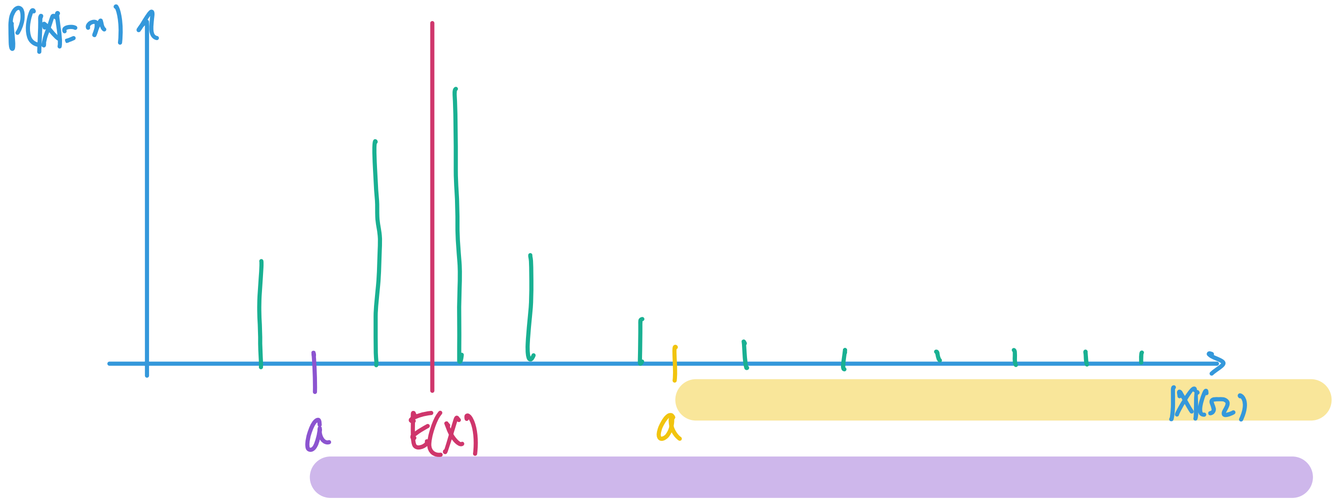
Soit X une v.a. réelle discrète d'espérance finie. Alors, pour tout $a > 0$:

$$P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}(|X|)}{a}$$

Remarque. *C'est une majoration de la probabilité que la v.a. prenne de grandes valeurs.*

Corollaire. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, X une v.a. réelle discrète admettant un moment d'ordre k. Alors, pour tout $a > 0$:

$$P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}(|X|^k)}{a^k}$$



Preuve : On calcule : ($a>0$ fixé)

$$E(|X|) = \sum_{x \in X(\Omega)} |x| \, P(X=x) \quad \text{par transfert}$$

$$= \overbrace{\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| < a}} |x| \, P(X=x)}^{\geq 0} + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| \geq a}} |x| \, P(X=x)$$

par paquets ($(|x|P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ sommable

$$\geq 0 + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| \geq a}} \underbrace{|x|}_{\geq a} P(X=x)$$

$$\geq a \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| \geq a}} P(X=x)$$

$$= a\, P(|X| \geq a)$$

D'où $\quad P(|X| \geq a) \leq \dfrac{E(|X|)}{a}$

Remarque:

- Lorsque X est à valeurs positives (ie $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$)

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

- $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad (|X|^k \geq a^k) = (|X| \geq a)$

$\omega \in (|X|^k \geq a^k)$

$\iff |X(\omega)|^k \geq a^k$

$\iff |X(\omega)| \geq a$

$\iff \omega \in (|X| \geq a)$

Donc $\quad P(|X|^k \geq a^k) \leq \dfrac{E(|X|)}{a}$

• Markov à $|X|^k$ et a^k :

$$P\left(|X|^k \geq a^k \right) \leq \frac{E(|X|^k)}{a^k}$$
$$\parallel$$
$$P\left(|X| \geq a \right)$$

<u>Remarque</u>: $P(|X| < a) = 1 - P(|X| \geq a)$

$$\geq 1 - \frac{E(|X|)}{a}$$

"proba que X soit grande".

4.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

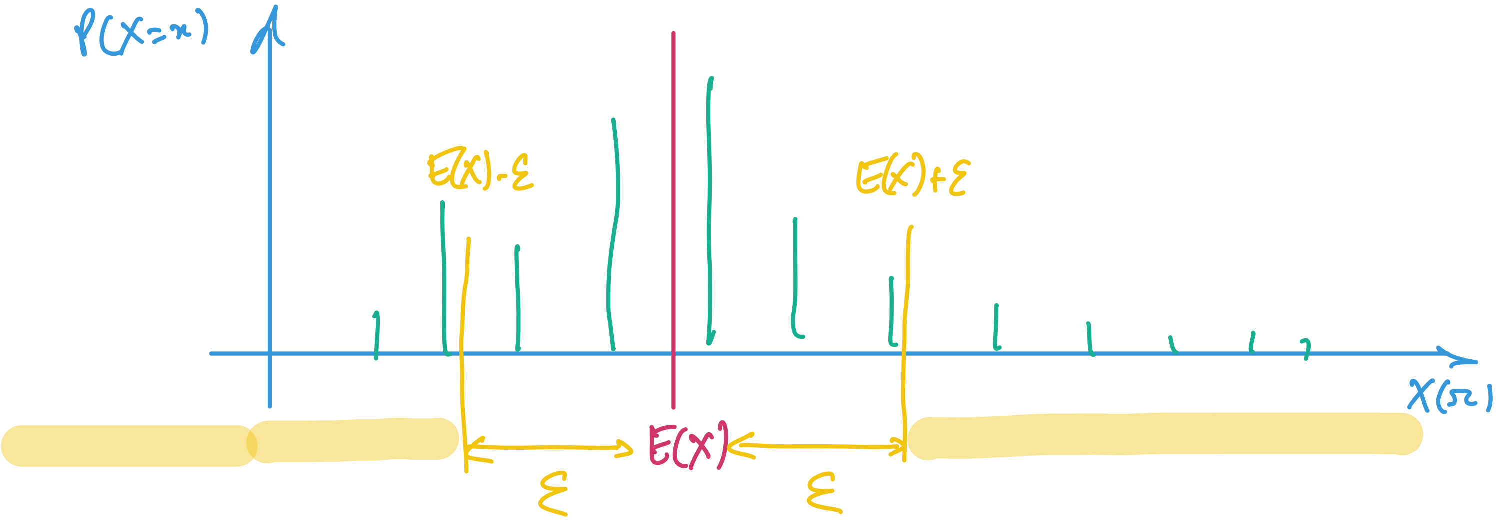
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète, telle que X^2 soit d'espérance finie.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\big(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Remarque. *On peut exprimer le résultat en passant à l'événement contraire :*

$$P\big(|X - \mathrm{E}(X)| < \varepsilon\big) \geqslant 1 - \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}$$



Preuve : Notons $Y = (X - E(X))^2$

Y est d'espérance finie car $X \in L^2$

Par l'inégalité de Markov :

$$P(|Y| \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(|Y|)}{\varepsilon^2}$$

or $(|Y| \geq \varepsilon^2) = ((X - E(X))^2 \geq \varepsilon^2)$

$= (|X - E(X)| \geq \varepsilon)$

et $E(|Y|) = E((X - E(X))^2)$

$= V(X)$

Donc $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$

"proba que X soit loin de $E(X)$".

Remarque. *L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de comprendre ce que mesure la variance : pour $\varepsilon > 0$ fixé, la probabilité que l'écart entre X et $\mathrm{E}(X)$ soit supérieur à ε est d'autant plus petite que $\mathrm{V}(X)$ est faible : la variance donne donc une indication de la dispersion de X autour de son espérance, i.e. sa plus ou moins forte tendance à s'écarter de sa moyenne.*
L'écart-type, qui mesure aussi la dispersion de X, présente l'intérêt de s'exprimer dans la même unité que les valeurs prises par la variable aléatoire X.

Exemple. Pour $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, montrer que :

$$P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

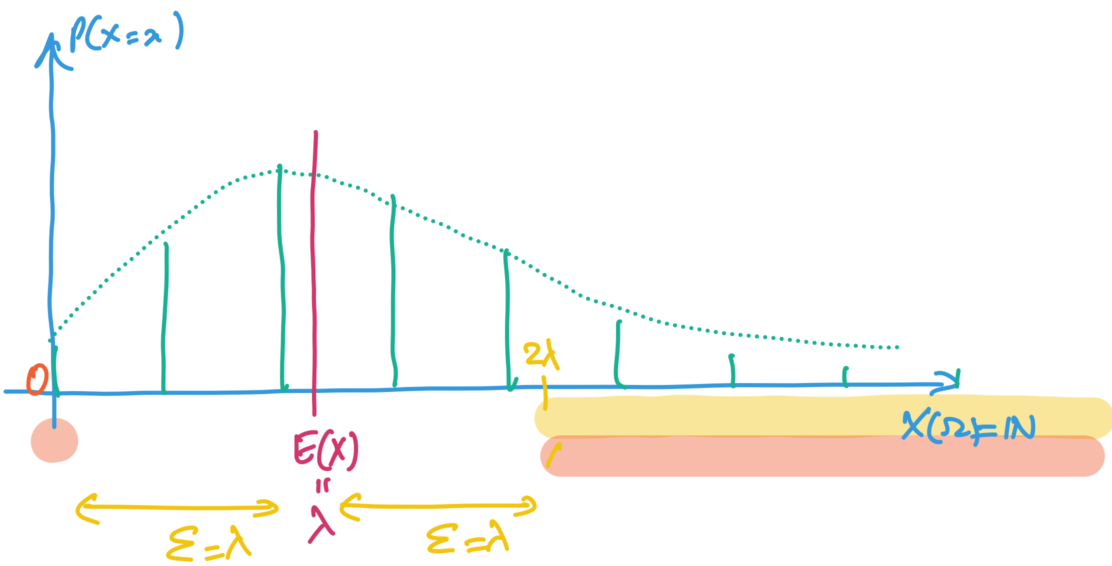
Idée 1 : Markov !

X à valeurs ≥ 0 donc

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{E(X)}{2\lambda} = \frac{\lambda}{2\lambda} = \frac{1}{2}$$

pas ce qu'on voulait

Idée 2 :



$(X \geq 2\lambda) = (X \geq E(X) + \lambda)$

$\subset (|X - E(X)| \geq \lambda)$

$$= (X \geq E(X)+\lambda) \underset{\text{disj}}{\cup} \underset{\substack{\| \\ (X=0)}}{(X \leq E(X)-\lambda)}$$

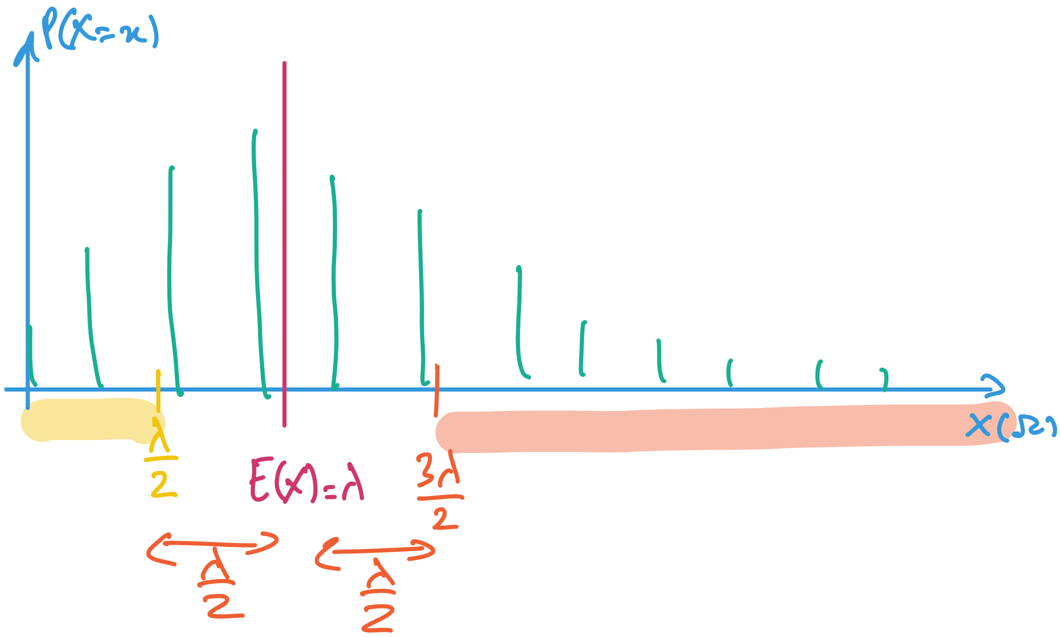
Donc, par l'inég de Bienaymé-Tchebychev

$$P(X \geq 2\lambda) \leq P(|X-E(X)| \geq \lambda)$$

$$\leq \frac{V(X)}{\lambda^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \qquad \text{car } V(X) = \lambda$$

$$P\left(X \leqslant \frac{\lambda}{2}\right) \leqslant \frac{4}{\lambda}$$



$$\left(X \leq \frac{\lambda}{2}\right) = \left(X \leq E(X) - \frac{\lambda}{2}\right)$$

$$\subset \left(|X-E(X)| \geq \frac{\lambda}{2}\right)$$

Donc, par l'inég de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(X \leq \frac{\lambda}{2}\right) \leq P\left(|X-E(X)| \geq \frac{\lambda}{2}\right)$$

$$\leq \frac{V(X)}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} = \frac{4\lambda}{\lambda^2} = \frac{4}{\lambda}$$

4.3 Loi faible des grands nombres

indépendantes

Loi faible des grands nombres.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie. On note $m = \mathrm{E}(X_1)$ (les espérances sont toutes égales), $\sigma = \sigma(X_1)$ (les écarts-types sont tous égaux) et :

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

et donc :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Remarque. *Pour déterminer la probabilité d'un événement A, l'idée courante consiste à répéter l'expérience aléatoire un grand nombre de fois, et observer le nombre d'apparition de l'événement A. Lorsque le nombre d'expérience augmente, la fréquence d'apparition de A devrait se rapprocher de la probabilité de A.*
La loi faible des grands nombres formalise et quantifie cette intuition : En notant $p = P(A)$ et X_k l'indicatrice de A, on a $X_k \sim \mathscr{B}(p)$ et X_k représente le nombre de fois que A a été observé à l'expérience k. Ainsi, la fréquence d'apparition de A au cours des n répétitions est la variable aléatoire :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Par la loi faible des grands nombres,

$$\forall\varepsilon > 0,\ P(|M_n - p| < \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

On peut dire que « M_n tend vers $p = P(A)$ » presque sûrement.

Preuve: On note $Y = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{S_n}{n}$

$$E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$$
$$= m$$

$$V(Y) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$$
$$= \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) \quad \text{car } (X_k)_k \text{ iid.}$$
$$= \frac{1}{n}\sigma^2$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|Y - E(Y)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Y)}{\varepsilon^2}$$

$$\text{ie} \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \underbrace{\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Remarque :

Comment estimer numériquement l'espérance de X ?

Exp aléatoire $\quad \Omega$

X va $\quad X(\omega)$

$$\left.\begin{array}{ll} X(\omega_1) & X_1(\omega_1) \\ X(\omega_2) & X_2(\omega_1) \\ X(\omega_3) & X_3(\omega_1) \\ \vdots & \vdots \\ X(\omega_n) & X_n(\omega_1) \end{array}\right\} \quad \frac{1}{n}\left(X(\omega_1) + \dots + X(\omega_n)\right) \simeq E(X)$$