Pour jé : 831.1, 831.2

Espérance et variance

Sauf mention contraire, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un espace probabilisé.

1 Espérance

On s'intéresse dans cette section aux v.a. réelles ou complexes.

1.1 Variables aléatoires réelles positives

Définition. Soit X un v.a. discrète, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. L'**espérance de** X est :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

Remarque.

- *Il s'agit de la somme d'une famille au plus dénombrable de réels positifs, cette somme est dans* $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.
- *On peut proposer la même définition lorsque* X *est à valeurs dans* $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.
- *Contrairement à la définition vue en première année, on somme une famille indexée par* $X(\Omega)$ *au plus dénombrable, et non par* Ω *qui peut être très gros. Cela revient à « regrouper » les épreuves selon leur valeur par* X.

$X : \Omega \longrightarrow \cancel{\mathbb{K}}\ \mathbb{R}_+$

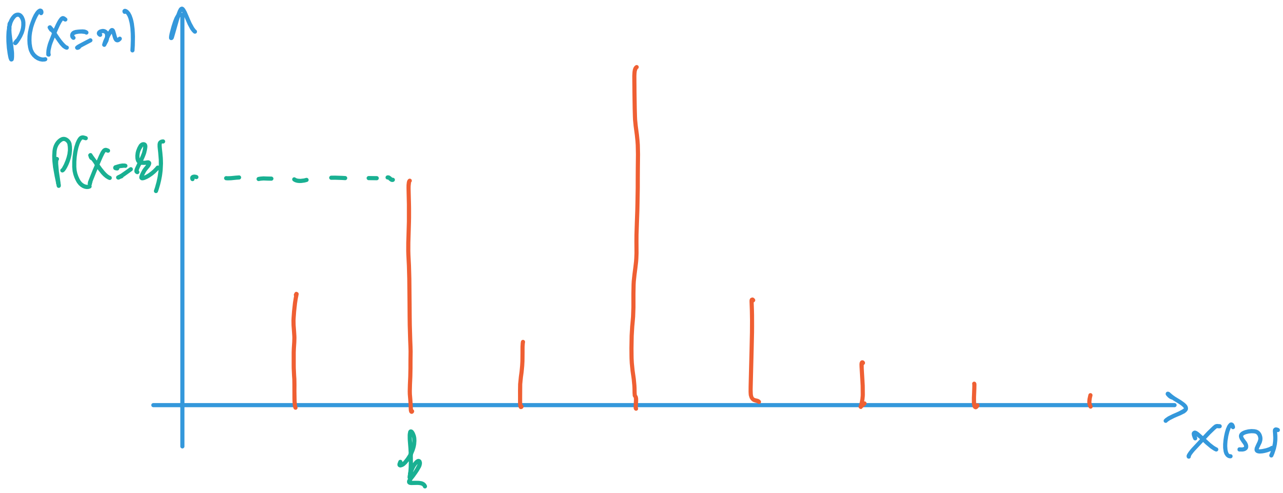
$\omega \longmapsto X(\omega)$

$X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$

dénombrable

$(X = x)$ évènements

$(P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ distrib. de proba



$X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$

espérance de X = moyenne pondérée des valeurs prises par X.

par la distrib de proba.

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \overbrace{x\, P(X=x)}^{\geq 0} \in [0, +\infty]$$

au plus dénombrable

En 1re année : $$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \overbrace{X(\omega)\, P(\{\omega\})}^{\geq 0}$$

par déf° sur Ω dénombrable ?!

En faisant des "paquets" $(X = x)$

$$E(X) = \sum_{x} \left(\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} X(\omega)\, P(\{\omega\}) \right)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} x \, P(\{\omega\}) \right)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} x \left(\sum_{\omega \in (X = x)} P(\{\omega\}) \right)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} x \, P\left(\bigcup_{\omega \in (X = x)} \{\omega\} \right)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} x \, P(X = x)$$

Exemple. On lance deux dés, et on note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros qui apparaissent sur les deux dés. Calculer $\mathrm{E}(X)$.

• Loi de X ?

On note D_1, D_2 les va des 2 dés supposées indép.

$$X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$$

$$D_1 \sim D_2 \sim \mathcal{U}([\![1,6]\!])$$

$$P(X=2) = P(D_1 + D_2 = 2)$$

$$= P\big((D_1 = 1) \cap (D_2 = 1)\big)$$

$$= P(D_1 = 1)\, P(D_2 = 1) \quad \text{par indép}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

$$P(X=3) = P\Big(\big((D_1 = 1) \cap (D_2 = 2)\big) \underbrace{\cup}_{\text{disjoints}} \big((D_1 = 2) \cap (D_2 = 1)\big)\Big)$$

$$= [\ldots]$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

[...]

$P(X=2) = \frac{1}{36}$ $\quad$ $P(X=3) = \frac{2}{36}$ $\quad$ $P(X=4) = \frac{3}{36}$

[...]

$$P(X=12) = \frac{1}{36}.$$

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(X=x) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \ldots$$

Exemple. On considère X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, définie par sa loi en posant :

$$\forall n \geqslant 1,\ P(X=n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Justifier que l'on définit ainsi une loi de probabilités.
Calculer $\mathrm{E}(X)$.

- $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle une distrib de proba ?

$*\ \frac{1}{n(n+1)} \geqslant 0$

$*\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

~~par télescopage~~
~~par glissement d'indice~~

$= \cancel{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}}$

série télescopique ?

↳ passer par les sommes partielles.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n}$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1}$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1$$ par télescopage

car $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$P(X=n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

- X est à valeurs $\geqslant 0$ donc

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, P(X=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

$$= +\infty$$

1.2 Une formule pour les v.a. à valeurs entières

Proposition. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$$

Remarque. *On peut généraliser cette formule au cas des v.a. à valeurs dans* $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Calculons dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n) \qquad \text{avec } (X \geqslant n) = \underbrace{\bigcup_{k \geqslant n} (X=k)}_{\text{disjoints}}$$

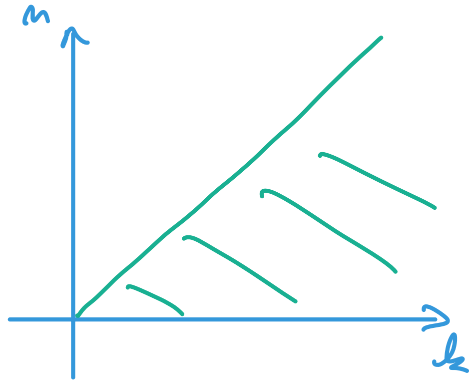
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} P(X=k) \right)$$

somme de $u_{n,k} = \begin{cases} P(X=k) & \text{si } k \geqslant n \\ 0 & \text{si } k < n \end{cases}$

$n, k \in \mathbb{N}^*$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} P(X=k) \right)$$

Fubini positif



$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k\, P(X=k)$$

$$= E(X)$$

Valable pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Autre version : $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$

Exemple : Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$P(X=n) = (1-p)^{n-1} p$

$P(X>n) = (1-p)^n$

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X>n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{1-(1-p)}$$

$$= \frac{1}{p}$$

1.3 Variables aléatoires réelles de signe quelconque, ou complexes

Définition. Soit X une v.a. discrète, à valeurs réelles ou complexes. Lorsque la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, on dit que X **est d'espérance finie**, et on définit :

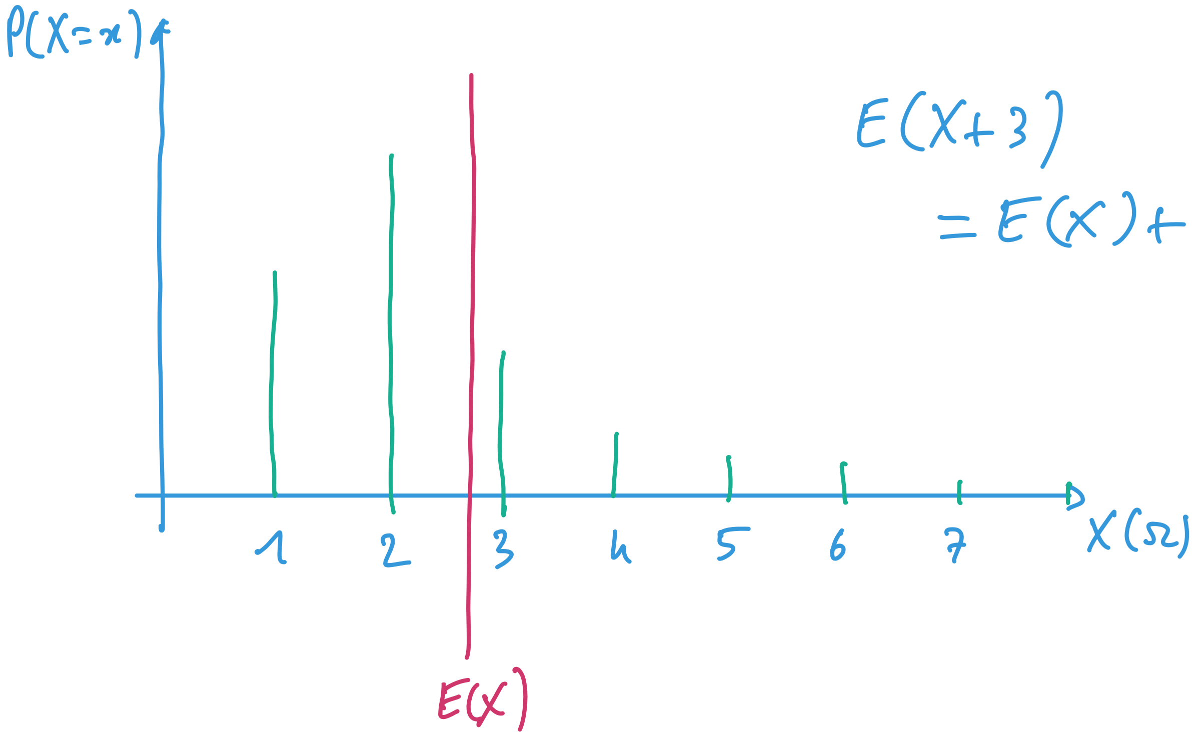
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

Dans le cas contraire, X n'a pas d'espérance.

Remarque.

- *X est donc d'espérance finie lorsque* $\sum_{x \in X(\Omega)} |x|P(X = x) < +\infty$.
- *L'espérance est un indicateur de position de la v.a.*

Notation. On note L^1 l'ensemble des v.a. d'espérance finie.



$E(X+3)$
$= E(X)+3$

Exemple. Quelle est l'espérance d'une variable aléatoire discrète constante, égale à a ?

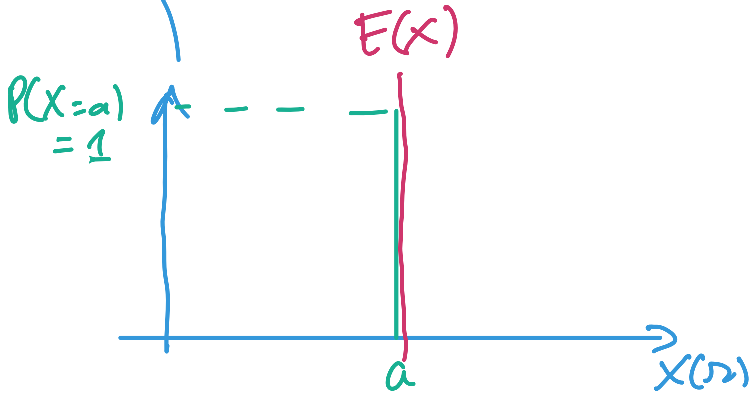
Remarque. *Le résultat reste valable si la v.a. n'est que presque sûrement constante.*

$X(\Omega) = \{a\}$

$P(X=a) = 1$

$E(X) = a \cdot P(X=a)$

$= a$



Remarque : $X(\Omega)$?

$P(X \neq a) = 0$

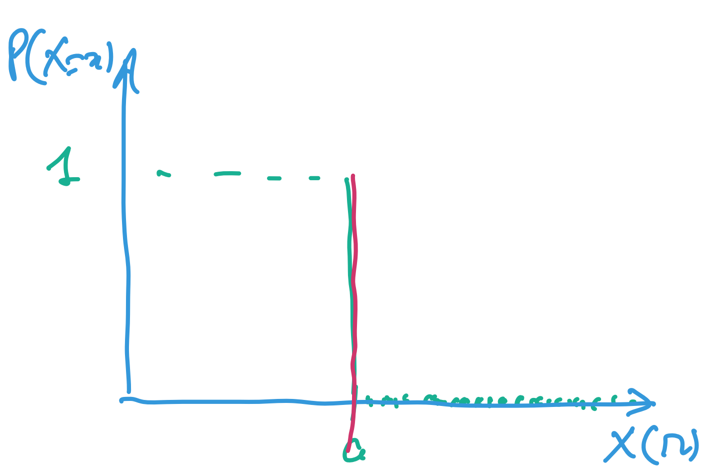
donc $P(X=a) = 1$

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \, P(X=x)$$

$$= a\,P(X=a) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \neq a}} x \, \underbrace{P(X=x)}_{=0}$$

$= a\,P(X=a)$

$= a$



Proposition. Deux variables aléatoires discrètes X et Y admettant la même loi et ayant une espérance finie ont la même espérance.

Définition. Une v.a. est dite **centrée** lorsqu'elle est d'espérance nulle : $\mathrm{E}(X) = 0$.

$E(X)$ ne dépend que de la distrib. de proba $(P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$

Si X est d'espérance m

alors $X - m$ est centrée

1.4 Espérance des lois usuelles

Proposition.

- Si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors $\mathrm{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$.
- Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors $\mathrm{E}(X) = p$.
- Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, alors $\mathrm{E}(X) = np$.
- Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, alors $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{p}$.
- Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, alors $\mathrm{E}(X) = \lambda$.

Exemple. Si A est un événement, montrer que $\mathbb{1}_A$ est d'espérance finie, et donner $\mathrm{E}(\mathbb{1}_A)$.

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$:

on calcule dans $[0, +\infty]$:

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n P(X=n)$$

$$= \sum_{n=\cancel{0}\,1}^{+\infty} n\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!}$$

$$= \lambda . e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \lambda$$

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$

M1 : $$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k P(X=k)$$

$$= \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} k . \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!} p^{k} (1-p)^{n-k}$$

$$= n \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k} (1-p)^{n-k}$$

glissement d'indice

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}$$

$$= np\,(p + 1 - p)^{n-1}$$

$$= np$$

M2 (à connaître)

- Soit $Y \sim \mathcal{B}(p)$

$$E(Y) = 0\,P(Y=0) + 1 \cdot P(Y=1)$$

$$= p$$

- $X \sim \mathcal{B}(n,p)$

En notant $Y_1 \dots Y_n$ des va de Bernoulli indép.

et de même paramètre p, on a

$$X \sim Y_1 + \dots + Y_n$$

donc $E(X) = E(Y_1 + \dots + Y_n)$

$$= E(Y_1) + \dots + E(Y_n)$$

par linéarité

$$= p + \dots + p$$

$$= np$$

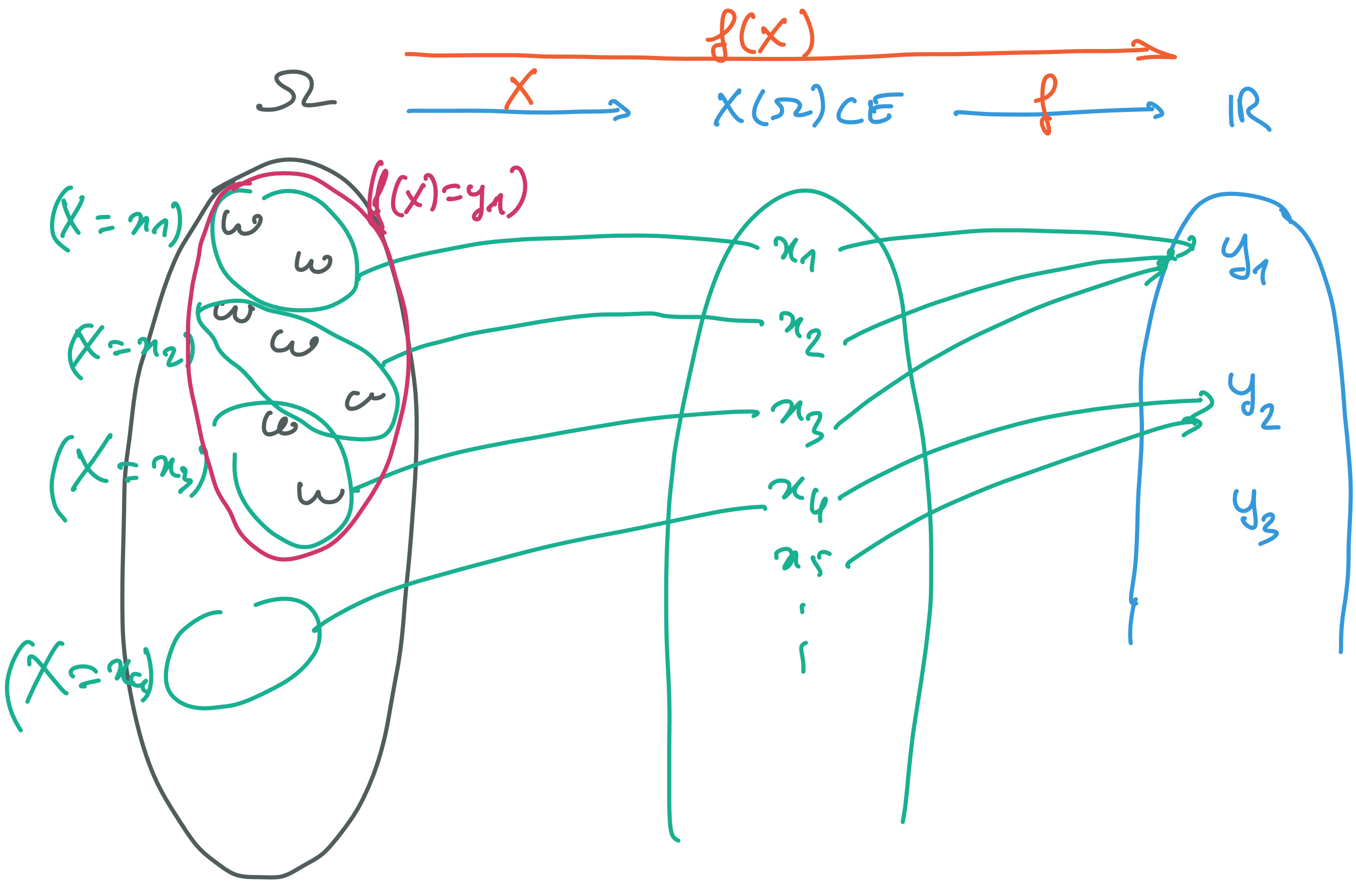
1.5 Propriétés de l'espérance

Formule de transfert.

Soit X une variable aléatoire discrète et f une fonction définie sur $X(\Omega)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La variable aléatoire $f(X)$ a un espérance finie si et seulement si $\big(f(x)P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.
On a dans ce cas :

$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,P(X=x)$$

Remarque. *On peut appliquer ce théorème dans le cas d'une v.a. vectorielle. Par exemple, si X et Y sont deux v.a. réelles, le calcul de $\mathrm{E}(XY)$ relève de la formule de transfert.*



$$E(f(X)) = \sum_{y\in f(X)(\Omega)} y\, P(f(X)=y)$$

$$(f(X)=y) = \bigcup_{\substack{x\in X(\Omega)\\ f(x)=y}} (X=x)$$

disjointe

$$E(f(X)) = \sum_{y\in f(X)(\Omega)} y\, P(f(X)=y)$$

$$= \sum_{y \in f(X)(\Omega)} y \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x)=y}} P(X=x)$$

$$= \sum_{y \in f(X)(\Omega)} \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x)=y}} f(x) P(X=x)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \, P(X=x)$$

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \, P(X=x)$$

En particulier pour $E(XY)$

X et Y deux va à valeurs dans $\mathbb{R}$

$Z = (X, Y)$ est un couple de va : c'est une va à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

$f : (u,v) \longmapsto uv$

$XY = f(Z)$

Par transfert

$$E(XY) = E(f(Z))$$

$$= \sum_{z \in Z(\Omega)} f(z)\, P(Z = z)$$

$$= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} f(x,y)\, P((X,Y) = (x,y))$$

$$= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} xy \quad P(X = x, Y = y)$$

Exemple. Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $-1, 0, 1$ avec les probabilités respectives $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$ et $\frac{6}{9}$.
Vérifier que $\mathrm{E}(X^2) = \frac{7}{9}$.

Espérance finie par comparaison. Si X et Y sont deux v.a. telles que $|X| \leqslant Y$ et Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie et :

$$\cancel{|\mathrm{E}(X)| \leqslant \mathrm{E}(Y)}$$

$$E(|X|) \leq E(Y)$$

<u>Preuve:</u> on suppose Y d'espérance finie, Y positive

$$|X| \leqslant Y$$

ie $\forall \omega \in \Omega, \quad |X(\omega)| \leq Y(\omega)$

les $(X=x)$ et $(Y=y)$ ne se comparent pas.

Dans $[0,+\infty]$:

$$E(|X|) = \sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X=x)$$

par transfert

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} |x| \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=x, Y=y)$$

car $(Y=y)_{y \in Y(\Omega)}$ système complet.

$$= \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} |x| P(X=x, Y=y)$$

Fubini positif.

si $\omega \in (X=x) \cap (Y=y)$ $\quad X(\omega) = x$ et $Y(\omega) = y$

donc $\quad |x| = |X(\omega)| \leq y$

$$\leq \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} y \, P(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{y \in Y(\Omega)} y \left(P(Y=y) \right)$$

loi marginale

$$= E(Y)$$

$$< +\infty$$

donc X est d'espérance finie.

Bref :
$$\left.\begin{array}{l} |X| \leq Y \\ Y \in L^1 \end{array}\right\} \Rightarrow X \in L^1$$

Linéarité de l'espérance. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles ou complexes d'espérances finies. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda X + \mu Y$ est d'espérance finie et :

$$\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\,\mathrm{E}(X) + \mu\,\mathrm{E}(Y)$$

Remarque. *Cela signifie que l'ensemble des v.a. d'espérance finie est un espace vectoriel, et que l'espérance est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.*

Exemple. On (re-)lance deux dés, et on note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros qui apparaissent sur les deux dés. Montrer que X est d'espérance finie et calculer $\mathrm{E}(X)$.

Preuve.

- Mq $\lambda X + \mu Y$ est d'espérance finie

$E(|\lambda X + \mu Y|)$ dans $[0, +\infty]$

$$= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} |\lambda x + \mu y|\, P(X = x, Y = y)$$

par transfert

$$\leq \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \left(|\lambda|\,|x| + |\mu|\,|y|\right) P(X = x, Y = y)$$

$$= |\lambda| \sum_{x \in X(\Omega)} |x| \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y)\right)$$

$$+ |\mu| \sum_{y \in Y(\Omega)} |y| \left(\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y)\right)$$

par Fubini positif.

$$= |\lambda| \sum_{x \in X(\Omega)} |x|\, P(X = x)$$

$$+ |\mu| \sum_{y \in Y(\Omega)} |y|\, P(Y = y)$$

lois marginales de (X, Y)

$$= |\lambda| E(|X|) + |\mu| E(|Y|)$$

par transfert.

$$< +\infty$$ par hypothèses.

<u>Ainsi</u> $\lambda X + \mu Y$ est d'espérance finie.

On calcule donc:

$$E(\lambda X + \mu Y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \lambda x + \mu y \; P(X=x, Y=y)$$

par transfert.

$$= \lambda \sum_{x \in X(\Omega)} x \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=x, Y=y) \right)$$

$$+ \mu \sum_{y \in Y(\Omega)} y \left(\sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x, Y=y) \right)$$

par Fubini sur famille sommable

$$= \lambda \sum_{x \in X(\Omega)} x \; P(X=x)$$

$$+ \mu \sum_{y \in Y(\Omega)} y \; P(Y=y)$$

lois marginales

$$= \lambda E(X) + \mu E(Y)$$

Exemple des dés

On a noté D_1, D_2 et $X = D_1 + D_2$

$$D_1 \sim D_2 \sim \mathcal{U}([\![1, 6]\!])$$

donc $E(D_1) = E(D_2) = \dfrac{7}{2}$

$$E(X) = E(D_1) + E(D_2) \quad \text{par linéarité}$$

$$= 7$$

Positivité de l'espérance.

Si X est positive (i.e. à valeurs dans $\mathbb{R}_+$) alors $\mathrm{E}(X) \geqslant 0$.

Dans $[0,+\infty[$

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \underbrace{x\, P(X=x)}_{\geqslant 0}$$

$$\geqslant 0$$

Reste vrai si X est presque sûrement positive

Croissance de l'espérance.

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes d'espérances finies telles que $X \leqslant Y$ alors $\mathrm{E}(X) \leqslant \mathrm{E}(Y)$.

Remarque.

- *L'hypothèse $X \leqslant Y$ signifie que, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$.*
- *Le résultat reste vrai si $X \leqslant Y$ presque sûrement.*

Linéarité et positivité appliqué à $Y - X$.

Inégalité triangulaire. Si X est d'espérance finie, alors :

$$|\operatorname{E}(X)| \leqslant \operatorname{E}(|X|)$$

1.6 D'autres propriétés de l'espérance

Proposition. Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X = 0)$ est presque-sûr.

Soit X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, tq $E(X) = 0$

$$0 = E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(X=x)$$

$$= 0\, P(X=0) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \neq 0}} \overbrace{x\, P(X=x)}^{\geq 0}$$

Somme nulle de termes positifs

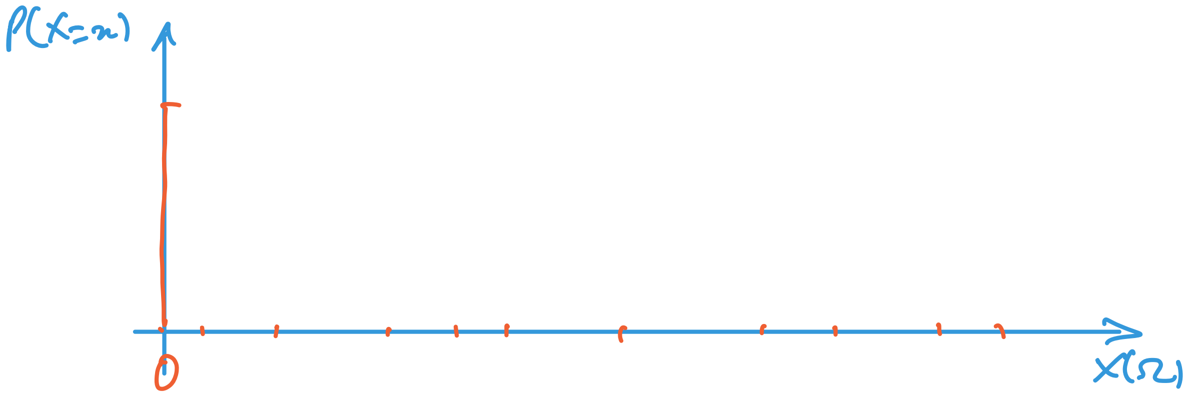
donc $\forall x \in X(\Omega),\ x \neq 0,\quad x\, P(X=x) = 0$

donc $P(X=x) = 0$

$$(X \neq 0) = \bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \neq 0}} (X=x)$$

donc $P(X \neq 0) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \neq 0}} P(X=x)$

$= 0$



Proposition. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, d'espérances finies. Alors XY est d'espérance finie et :

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\ \mathrm{E}(Y)$$

Remarque. *Ce résultat peut être généralisé au cas de n variables indépendantes et d'espérances finies.*

Preuve :

- On calcule dans $[0, +\infty]$:

$$E(|XY|) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} |xy|\, P(X=x, Y=y)$$

par transfert

$$= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} |xy|\, P(X=x)\, P(Y=y)$$

par indépendance

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} - \right)$$

Fubini - positif.

$$= \left(\sum_{x \in X(\Omega)} |x|\, P(X=x) \right) \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} |y|\, P(Y=y) \right)$$

$$= E(|X|)\ E(|Y|)$$

$$< +\infty$$

donc XY est d'espérance finie

- On calcule alors

$$E(XY) = [\dots]$$
$$= E(X)\,E(Y)$$

comme ci-avant.

831.16

$\frac{1}{X+1}$ va positive. On calcule dans $[0,+\infty]$:

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} P(X=n)$$

par transfert

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} \left(e^{\lambda} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$$