Pour moi : 830.1 , 830.3

Jeu du pile-face infini, lancers indépendants.

Montrons que « n'obtenir que des piles » est négligeable.

$$E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P_n$$

donc $\cancel{P(E) = \prod_{n \in \mathbb{N}} P(P_n)}$ par indépendance

$\cancel{= \prod_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2}}$ $\quad \ln(\prod \ldots) = \sum \ln(\ldots)$

$\cancel{= 0}$

$\cancel{\bigcap_{k=1}^{n} P_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} E}$ → continuité monotone.

- $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} P_k\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} P_k\right)$ continuité décroissante

- $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} P_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(P_k)$ par indépendance

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2^n}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

2 Lois usuelles

Conseil. *Il n'est pas inutile de ficher les lois usuelles.*

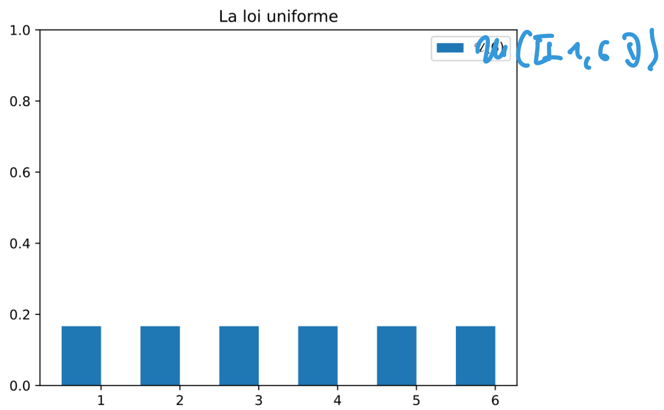
2.1 Loi uniforme

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[\![1, n]\!]$ lorsque :

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{n}$$

On note alors $X \sim \mathscr{U}([\![1, n]\!])$.

Interprétation. *C'est la loi du choix « au hasard » d'un élément dans un ensemble à n éléments.*

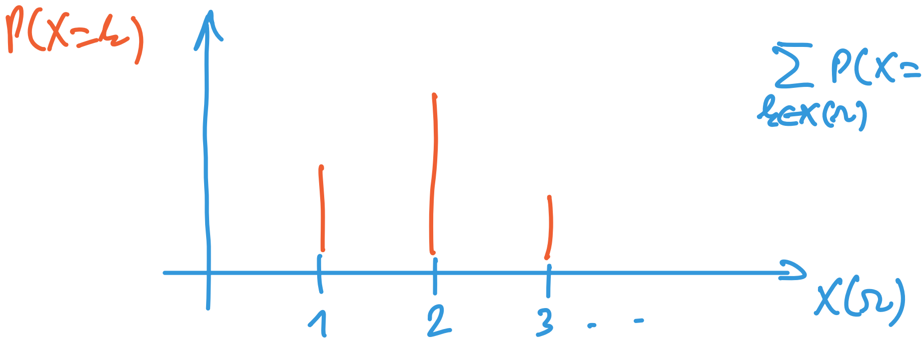


loi d'une va = distribution de probabilité $(P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$

$(\alpha_i)_{i \in I}$ est une distrib de proba

$$\iff \begin{cases} \forall i \quad \alpha_i \geq 0 \\ \sum_{i \in I} \alpha_i = 1 \end{cases}$$

dans ce cas, $\{i \text{ tq } \alpha_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.



$$\sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k) = 1$$

ω $\quad\quad X(\omega)$?

$1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots$

2.2 Loi de Bernoulli

Définition. Soit $p \in]0,1[$. Une variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p lorsque :

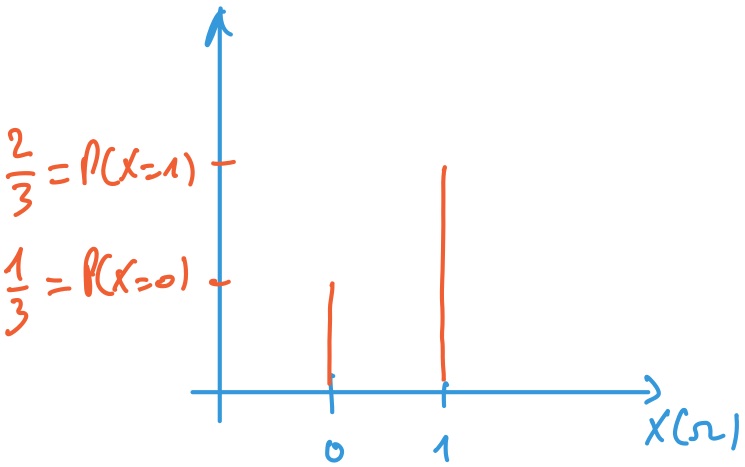
$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{et} \quad P(X = 1) = p, \; P(X = 0) = 1 - p$$

On note alors $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Exemple. Toute expérience à deux issues, comme le jeu de Pile ou Face, est naturellement modélisée par une v.a. suivant une loi de Bernoulli.

Exemple. Si A est un événement, sa fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$:

$$\mathbb{1}_A \sim \mathscr{B}(P(A))$$



"succès" "échec"

$\omega \in$ "échec" $\iff X(\omega) = 0$

$\omega \in$ "succès" $\iff X(\omega) = 1$

2.3 Loi binomiale

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Une variable aléatoire X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p lorsque :

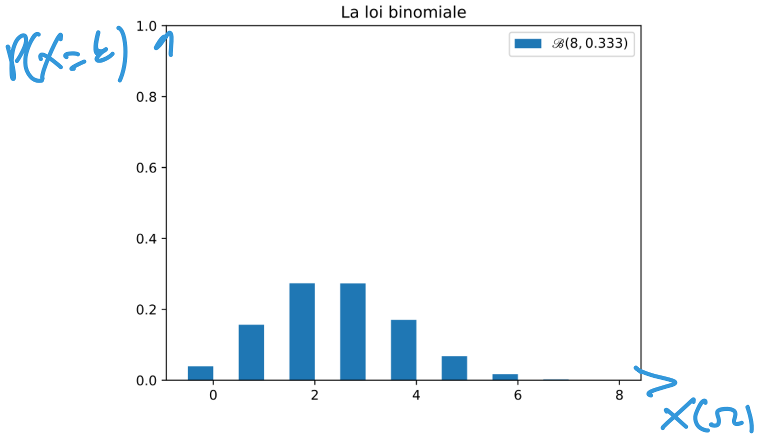
$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note alors $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

Interprétation. *C'est la loi du nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes, de même paramètre p.*

Proposition. Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre p, alors :

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \mathscr{B}(n, p)$$



Remarque : Exp aléatoire = répétition de n épreuves de Bernoulli indép, de même paramètre p.

X = va du nombre de succès.

- $X(\Omega) = \{0, .., n\}$ $\qquad X(\Omega) \subset \{0, .., n\}$
- Pour $k \in X(\Omega)$

$$(X = k) = E_1 \cap E_2 .. \cap S_i \cap E_{i+1} \cap \dots S_n$$

$$\cup \dots$$

k succès parmi les n épreuves de Bernoulli

On note E_i = « échec à la i^{e} épreuve de Bernoulli »

S_i = « succès ______ »

$$(X=k) = \bigcup_{\substack{i_1,\dots,i_k \in [\![1,n]\!] \\ \text{2 à 2 distincts}}} \left(\bigcap_{j\in\{i_1\dots i_k\}} S_j\right) \cap \left(\bigcap_{\substack{j\notin\{i_1\dots i_k\} \\ j\in\{1\dots n\}}} E_j\right)$$

$$P(X=k) = \sum_{\substack{i_1\dots i_k \in [\![1,n]\!] \\ \text{2 à 2 distincts}}} P\left(\left(\bigcap S_j\right) \cap \left(\bigcap E_j\right)\right)$$

σ-additivité, l'union étant disjointe

$$= \sum_{\substack{i_1\dots i_k \in [\![1,n]\!] \\ \text{2 à 2 distinct}}} \prod_{j\in\{i_1\dots i_k\}} P(S_j) \prod_{j\notin\{i_1\dots i_k\}} P(E_j)$$

$$= \sum_{\substack{i_1\dots i_k \in [\![1,n]\!] \\ \text{2 à 2 distincts}}} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= p^k (1-p)^{n-k} \operatorname{Card}\left\{(i_1\dots i_k) \in [\![1,n]\!],\ \text{2 à 2 distincts}\right\}$$

nombre de parties à k éléments dans $[\![1,n]\!]$: le choix des indices.

choisir un k-uplet $(i_1 \dots i_k)$ d'éléments de $[\![1,n]\!]$ 2 à 2 distincts, c'est choisir une partie de $[\![1,n]\!]$ à k éléments.

$$P(X=k) = p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{k}$$

• Soit $X_1 \dots X_n$ indép qui suivent $\mathcal{B}(p)$.

Mque $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

* $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$ $\qquad X_1(\Omega) = \{0,1\}$

$P(X_1 = 0) = 1-p$

$P(X_1 = 1) = p$

donc $X_1 \sim \mathcal{B}(1,p)$ $\quad P(X_1 = k) = \binom{1}{k} p^k (1-p)^{1-k}$

* On suppose que $(X_1 + \dots + X_n) \sim \mathcal{B}(n,p)$

Mque $(X_1 + \dots + X_n + X_{n+1}) \sim \mathcal{B}(n+1,p)$

On note $Y = X_1 + \dots + X_n$ v.a.

(c'est une v.a. $(X_1, \dots, X_n)$ est un v.a

et $(t_1, \dots, t_n) \xmapsto{f} t_1 + \dots + t_n$ est une fonction.

donc $f(X_1, \dots, X_n)$ est une va)

par HR, $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$

donc $Y(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $P(Y=k) = \dots$

et $X_{n+1} \in \mathcal{B}(p)$

donc $X_{n+1}(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(X_{n+1} = 0) \dots$

Donc en notant $Z = Y + X_{n+1}$,

$$Z(\Omega) \subset [\![0, n+1]\!]$$

Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$ Calculons $P(Z=k)$

1er cas : $k \neq 0$ et $k \neq n+1$

$$P(Z=k) = P(Z=k \mid X_{n+1}=0)\, P(X_{n+1}=0)$$
$$+ P(Z=k \mid X_{n+1}=1)\, P(X_{n+1}=1)$$

par les probas totales en conditionnant par X_{n+1}.

($X_{n+1}(\Omega) = \{0,1\}$ donc $(X_{n+1}=0, X_{n+1}=1)$ est un système complet)

$$= P(Y + X_{n+1} = k \mid X_{n+1}=0)\, P(X_{n+1}=0)$$
$$+ P(Y+X_{n+1} = k \mid X_{n+1}=1)\, P(X_{n+1}=0)$$

$$= P(Y = k \mid X_{n+1}=0)\, P(X_{n+1}=0)$$
$$+ P(Y = k-1 \mid X_{n+1}=1)\, P(X_{n+1}=1)$$

car Y et X_{n+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions : $X_1 \ldots X_n, X_{n+1}$ sont indépendantes donc $f(X_1, \ldots, X_n)$ et X_{n+1} sont indépendantes

$$= P(Y=k)\,P(X_{n+1}=0)$$
$$+ P(Y=k-1)\,P(X_{n+1}=1)$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (1-p)$$
$$+ \binom{n}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1} \quad p$$

$$= \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] p^k (1-p)^{n+1-k}$$

$$= \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k}$$

2^e cas: si $k=0$

$$P(Z=0) = P(Z=0 \mid X_{n+1}=0)\,P(X_{n+1}=0)$$
$$+ P(Z=0 \mid X_{n+1}=1)\,P(X_{n+1}=1)$$
$$= P(Y=0)\,P(X_{n+1}=0)$$
$$+ \ 0 \cdot P(X_{n+1}=1)$$
$$= 1 . p^0 (1-p)^n . (1-p)$$
$$= (1-p)^{n+1}$$

3^e cas $k=n+1$

de même $P(Z=n+1) = p^{n+1}$ $\square$

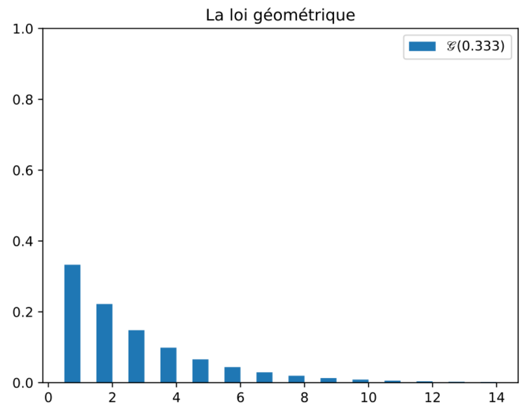
2.4 Loi géométrique

Définition. Soit $p \in]0,1[$. Une variable aléatoire X suit une **loi géométrique** de paramètre p lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$$

On note alors $X \sim \mathscr{G}(p)$.

Interprétation. *C'est la loi du ~~numéro~~ rang du premier succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même paramètre p.*



Remarque : $P(X > k) = (1-p)^k$

↳ par le calcul

↳ $(X > k) = E_1 \cap E_2 \cap \dots E_k$

(échec aux k premières épreuves de Bernoulli)

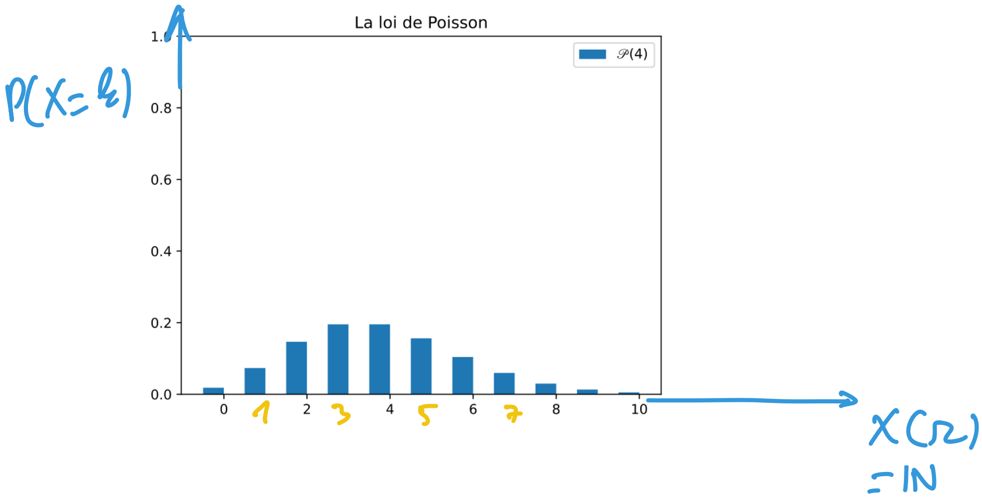
2.5 Loi de Poisson

Définition. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson** de paramètre λ lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

On note alors $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

Interprétation. *On l'appelle la loi « des événements rares » : lorsqu'un événement rare arrive en moyenne λ fois sur une période T, c'est la loi du nombre de fois où cet événement se produit sur une période donnée.*



$\left(e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle une distrib de proba ?

- $\forall k \in \mathbb{N} \quad e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} \geq 0$
- On calcule dans $[0,+\infty[\,\cup\{+\infty\}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$$

donc $\left(e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une distrib de proba, qui définit la loi d'une v.a.

Interprétation

Observation statistique d'un phénomène.

Un truc arrive en moyenne λ fois sur une période T

Ex 1 : en moyenne, sur 2h, on entend

4 animaux dans les couloirs.

X = va nb de cri. d'animaux en 2h.

$\omega_1 \qquad X(\omega_1) = 3$

$\omega_2 \qquad X(\omega_2) = 7$

$X \sim \mathcal{P}(4)$

3 Couples de variables aléatoires

3.1 Loi conjointe, lois marginales

Remarque. *On a vu que si X et Y sont deux v.a. discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, alors $Z = (X, Y)$ est aussi une v.a. discrète.*
On s'intéresse aux liens entre les lois de X et Y d'une part, et de Z d'autre part.
On a directement $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. En pratique, on ne cherche pas à préciser $Z(\Omega)$.

Définition. Si X et Y sont deux v.a. à valeurs dans $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement, leur **loi conjointe** est la loi du couple (X, Y) :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \ P((X, Y) = (x, y)) = P((X = x) \cap (Y = y))$$

que l'on note plus simplement $P(X = x, Y = y)$.
Les **lois marginales** du couple (X, Y) sont celles de X et de Y.

X va $\quad X(\Omega) \quad \forall x \in X(\Omega) \quad P(X=x) = \dots$

Y va $\quad Y(\Omega) \quad \forall y \in Y(\Omega) \quad P(Y=y) = \dots$

$Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$

$Z = (X, Y) \quad Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$

l'inclusion peut être stricte.

$X(\Omega) = \{$ l'ensemble des valeurs prises par $X \}$
$= \{ X(\omega)$ où $\omega \in \Omega \}$

$Z(\Omega) = \{ (X(\omega), Y(\omega))$ où $\omega \in \Omega \}$
$\subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$

Exemple: Répétition de 3 épreuves de Bernoulli indip de paramètre $\frac{1}{2}$.

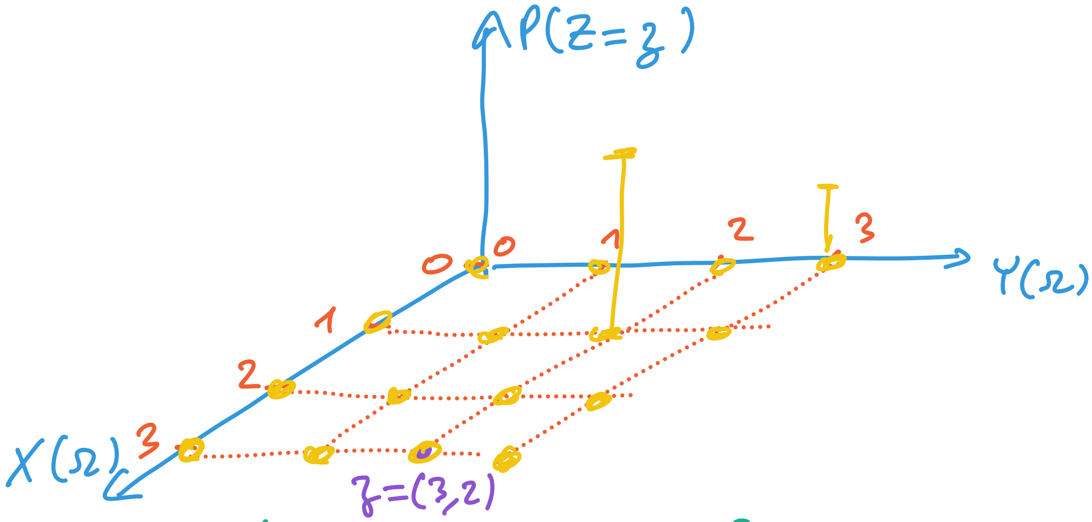
X = nb de succès , $\quad Y$ = nb d'échecs

$X \sim \mathcal{B}(3, \frac{1}{2})$ $\qquad$ $Y \sim \mathcal{B}(3, 1-\frac{1}{2})$

$X(\Omega) = [\![0, 3]\!]$ $\qquad$ $Y(\Omega) = [\![0, 3]\!]$

$Z = (X, Y)$

$Z(\Omega) \subset [\![0, 3]\!]^2$



16 valeurs possibles pour Z

L'évènement $(Z = (3,2)) = (X = 3) \cap (Y = 2)$

est impossible.

donc, en toute rigueur, $(3,2) \notin Z(\Omega)$

Ici $\quad Z(\Omega) \subsetneq X(\Omega) \times Y(\Omega)$

Pas grave : on dit $P(Z = (3,2)) = 0$

Exemple.

- Un prof pose une question à deux étudiants, Antoine et Baptiste, qui n'ont pas appris leur cours. Leur réponse respective est une variable aléatoire notée A (resp. B), qui suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

- Dans le même contexte, Antoine a une confiance aveugle en Baptiste, et copie sa réponse (même si elle répond toujours au hasard). A et B suivent encore $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

- Dans le même contexte, Baptiste se méfie d'Antoine, et copie sur sa copie pour répondre l'opposé (tandis que lui répond toujours au hasard). A et B suivent encore $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Dans les trois situations précédentes, le couple (A, B) ne suit pas du tout la même loi :

$A \backslash B$	0	1	P_A
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
P_B	1/2	1/2	1

$A \backslash B$	0	1	P_A
0	1/2	0	1/2
1	0	1/2	1/2
P_B	1/2	1/2	1

$A \backslash B$	0	1	P_A
0	0	1/2	1/2
1	1/2	0	1/2
P_B	1/2	1/2	1

Remarque. *Il apparaît bien que connaître les lois marginales n'est pas suffisant pour connaître la loi conjointe.*

3.2 Détermination pratique des lois marginales

Remarque. *On peut visualiser loi conjointe et lois marginales dans un tableau (fini ou dénombrable), avec* $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ *et* $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$ *et en notant* $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ *:*

$X \backslash Y$	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	Loi de X
x_1	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$P(X = x_1) = \sum_{j \in J} p_{1j}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$P(X = x_i) = \sum_{j \in J} p_{ij}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
Loi de Y	$P(Y = y_1) = \sum_{i \in I} p_{i1}$	$\cdots$	$P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} p_{ij}$	$\cdots$	1

Proposition. On obtient les lois marginales par σ-additivité, ou applications des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Y = y)_{y \in Y(\Omega)}$:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x | Y = y) P(Y = y) \end{aligned}$$

et de même pour $P(Y = y)$.

3.3 Extension aux n-uplets de variables aléatoires

Définition. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $E_1, \ldots, E_n$. Alors l'application :

$$X \,:\, \omega \mapsto (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$$

est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E_1 \times \cdots \times E_n$.
En général, les E_i sont (des parties de) $\mathbb{R}$ et X est appelé un **vecteur aléatoire** discret.

Loi conjointe. Avec les notations précédentes, la loi conjointe est la loi de X : elle est entièrement déterminée par la donnée de $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ et, pour $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, la valeur de $P(X = (x_1, \ldots, x_n)) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$.

Lois marginales. La loi de X_1, dite **loi marginale**, se déduit de la loi conjointe par *sigma*-additivité :

$$\forall x \in X_1(\Omega),\ P(X_1 = x) = \sum_{(x_2,\ldots,x_n) \in X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)} P(X_1 = x, X_2 = x_2 \ldots, X_n = x_n)$$

et de même pour X_2, ..., X_n.

Proposition. Pour A partie de $E_1 \times \cdots \times E_n$,

$$P(X \in A) = \sum_{(x_1,\ldots,x_n) \in A \cap (X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega))} P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$$

$$A \subset E_1 \times \cdots \times E_n$$

$$A = \{ (x_1 \ldots x_n) \in A \}$$

$$= \bigcup_{(x_1 \ldots x_n) \in A} \{ (x_1 \ldots x_n) \}$$

celte union n'a pas de raison d'être dénombrable.

$$X(\Omega) \subset X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$$

Ce produit cartésien est dénombrable.

$$(X \in A) = \{ \omega \text{ tq } X(\omega) \in A \}$$

$$= (X \in A \cap (X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)))$$

union disjointe dénombrable.

$$= \bigcup_{(x_1 \ldots x_n) \in A \times (X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega))} (X = (x_1 \ldots x_n))$$

4 Indépendance de deux variables aléatoires

4.1 Lois conditionnelles

Proposition. Soit X et Y deux v.a. discrètes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans E et F respectivement. Pour $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) > 0$, on définit la **loi sachant** $(Y = y)$ **de** X par la distribution de probabilités discrètes :

$$\big(P(X = x \mid Y = y)\big)_{x \in X(\Omega)}$$

c'est-à-dire que $P_{X|(Y=y)}(X = x) = \dfrac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$.

Remarque. *On présente en annexe, page 9, un définition plus précise de la loi conditionnelle.*

4.2 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y sont **indépendantes** et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ si et seulement si, pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, c'est-à-dire :

$$\forall x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega),\ P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y)$$

Remarque. *De façon équivalente, cela signifie que la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par :*

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y)$$

Proposition. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. Alors pour tout $A \subset \cancel{X(\Omega)}\ E$ et $B \subset \cancel{Y(\Omega)}\ F$, on a :

$X(\Omega) \subset E \quad Y(\Omega) \subset F$

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$$

Remarque. *On peut montrer que l'indépendance de X et Y est équivalente à l'égalité, pour tout $x \in X(\Omega)$, de la loi conditionnelle sachant $(X = x)$ de Y et de celle de Y, i.e. $P_{Y|(X=x)} = P_Y$.*

On calcule :

$$P(X \in A, Y \in B) = P((X \in A) \cap (Y \in B))$$

$$= P\Big(\bigcup_{\substack{x \in A \cap X(\Omega) \\ y \in B \cap Y(\Omega)}} (X = x) \cap (Y = y) \Big)$$

union disjointe, dénombrable

$$= \sum_{\substack{x \in A \cap X(\Omega) \\ y \in B \cap Y(\Omega)}} P(X = x, Y = y) \quad \text{par } \sigma\text{-additivité}$$

$$= \sum_{\substack{x \in A \cap X(\Omega) \\ y \in B \cap Y(\Omega)}} P(X = x) \cdot P(Y = y) \quad \text{par indépendance}$$

par Fubini positif

$$= \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} \Big(\sum_{y \in B \cap Y(\Omega)} P(X = x) \cdot P(Y = y) \Big)$$

$$= \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} \left(P(X=x) \left(\sum_{y \in B \cap Y(\Omega)} P(Y=y) \right) \right)$$

$$= \left(\sum_{y \in B \cap Y(\Omega)} P(Y=y) \right) \left(\sum_{x \in A \cap X(\Omega)} P(X=x) \right)$$

$$= P(Y \in B)\, P(X \in A)$$

4.3 Indépendance d'une famille finie de variables aléatoires

Définition. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes. On dit qu'elles sont (mutuellement) **indépendantes** si et seulement si pour tout $x_1 \in X_1(\Omega), \ldots, x_n \in X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 = x_1), \ldots, (X_n = x_n)$ sont indépendants, c'est-à-dire :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot \ldots P(X_n = x_n)$

On peut généraliser la propriété vue pour le cas de deux variables aléatoires discrètes indépendantes :

Proposition. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes (mutuellement) indépendantes. Soit $A_1 \subset X_1(\Omega), \ldots, A_n \subset X_n(\Omega)$. On a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i)$$

4.4 Indépendance d'une famille quelconque de variables aléatoires

Définition. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de v.a. discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On dit que $(X_i)_{i\in I}$ est **indépendante** si et seulement si toute sous-famille $(X_i)_{i\in J}$, où $J \subset I$ est fini, est indépendante.

Remarque. *On peut donc quantifier la définition suivante par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i_1, \dots, i_n \in I \text{ distincts},\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in X_{i_1}(\Omega) \times \cdots \times X_{i_n}(\Omega),\ P(X_{i_1} = x_1, \dots, X_{i_n} = x_n) = P(X_{i_1} = x_1) \dots P(X_{i_n} =$$

4.5 Opérations sur les familles de v.a. indépendantes

Théorème.

> Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
> Alors, pour toutes fonctions f et g, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Remarque. *Ce résultat s'étend au cas de plus deux variables aléatoires.*

Lemme des coalitions.

> Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.d. indépendantes.
> Alors pour toutes fonctions f et g, $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque. *Ce résultat s'étend au cas de plus deux coalitions.*

Preuve: On a vu que $f(X)$ et $g(Y)$ sont des va.

Soit $x' \in f(X)(\Omega)$ et $y' \in g(Y)(\Omega)$

$$P(f(X) = x', g(Y) = y')$$

$$= P(X \in f^{-1}(\{x'\}), Y \in g^{-1}(\{y'\}))$$

$$f^{\leftarrow}(\{x'\})$$

$$= P(X \in f^{-1}(\{x'\}))\, P(Y \in g^{-1}(\{y'\}))$$

par indépendance

$$= P(f(X) = x')\, P(g(Y) = y')$$

Lemme des coalitions

Soit $X_1 \ldots X_n$ va indépendantes.

$$[X_1, \ldots, X_m], [X_{m+1}, \ldots, X_n]$$

$f(X_1 \ldots X_m)$ $g(X_{m+1} \ldots X_n)$ indép.

Exemple: Soit des va indépendantes:

$$\underbrace{(X_1\ \ X_2)}_{Y_1}\ \underbrace{(X_3\ \ X_4)}_{Y_2}\ \underbrace{(X_5\ \ X_6)}_{Y_3} - - - \ \underbrace{(X_{2n-1}\ \ X_{2n})}_{Y_n}$$

On pose $Y_k = X_{2k-1} + X_{2k}$

Alors les Y_k sont indépendantes.

$$Z_2$$

$$(X_1\ \ (X_2)\ (X_3)\ \ X_4)\ X_5\ \ X_6 - - - \ X_{2n-1}\ \ X_{2n}$$

$$Z_1 \qquad Z_3$$

On pose $Z_k = Y_k + Y_{k+1}$

le lemme des coalitions ne s'applique pas.

5 Existence

On admet le résultat suivant :

Théorème.

Soit $(\mathscr{L}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de lois de probabilités discrètes. Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et une famille $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de v.a. discrètes indépendantes sur cet espace tels que, pour tout i, $X_i \sim \mathscr{L}_i$.

Définition. On appelle **variables i.i.d.** des variables **indépendantes** et **identiquement distribuées**, c'est-à-dire qui suivent toutes la même loi.

On appelle **suite i.i.d.** une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de v.a. discrètes indépendantes, et qui suivent toutes la même loi.

Exemple. Le jeu de pile ou face infini se modélise par une suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

830.35 [*]

Construire un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et deux variables aléatoires X et Y sur cet espace, indépendantes, et telles que $X \sim \mathscr{G}(p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(n, p)$.