SCEI

inscription 8 décembre → 12 janvier ⚠

pièces administratives 8 décembre → 20 janvier

paiement 12 janvier → 20 janvier

Attention aucune souplesse

Date pièce d'identité

Quels concours

notices

X-ENS 220 + 0

CC-INP 225 E3A-polytech 120

Mines-Ponts 360 Mines-télécom 320

Centrale-Supélec 140 x

Autres EPITA, BECEAS, ENAC etc.

Les oraux

5/2

Pour les 7h : à rédiger 820.17 ou 820.18 ou 560.17 [*]

Variables aléatoires discrètes

Sauf mention contraire, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un espace probabilisé.

1 Qu'importe l'épreuve, pourvu qu'on ait le résultat !

1.1 Définition

Définition. Soit E un ensemble. Une **variable aléatoire discrète** X est une application :

$$X \,:\, \Omega \to X(\Omega) \subset E$$

$\omega \mapsto X(\omega)$

telle que :

- l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est au plus dénombrable ;
- pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $(X = x)$ est un événement.

$X(\Omega)$ dénombrable

$\forall x \in X(\Omega) \quad (X=x) \in \mathscr{A}$

$X^{\leftarrow}(\{x\})$

Remarque. *$(X = x)$ est l'ensemble $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$, image réciproque (ou tiré en arrière) de $\{x\}$ par l'application. Dire que c'est un événement, c'est dire qu'il est dans la tribu $\mathscr{A}$.*

Remarque. *Travailler avec des variables aléatoires, c'est regrouper dans un même événement les épreuves en fonction de leur image par X.*

$(X=x)$ est l'ensemble des épreuves qui valent x par X.

$\omega \in (X=x) \iff X(\omega) = x$

Exemple. Lors du lancer de deux dés, on appelle X le résultat de la somme des deux faces obtenues. C'est une variable aléatoire.

Exemple. On considère Ω l'ensemble des individus actuellement présents dans la salle. On peut considerer X la taille en cm, Y l'âge en années. Ce sont deux v.a. : $(X = 181)$, $(X \geqslant 190)$, $(Y = 19)$, $(Y = 15)$ sont des événements (et on peut se demander les épreuves qui les réalisent).

Exemple. On considère le jeu du pile ou face infini. Notant X le rang d'apparition du premier pile, X est un v.a. : $(X = 3)$, $(X > 5)$ sont des événemnets.

Remarque. *Les v.a. étudiées dans le cadre de notre programme sont toutes discrètes. Elles sont souvent à valeurs numériques, voire entières, mais on manipule aussi des v.a. à valeurs vectorielles quand on manipule des couples ou des n-uplets de v.a.*

E importe peu, c'est $X(\Omega)$ qui importe

Définition.

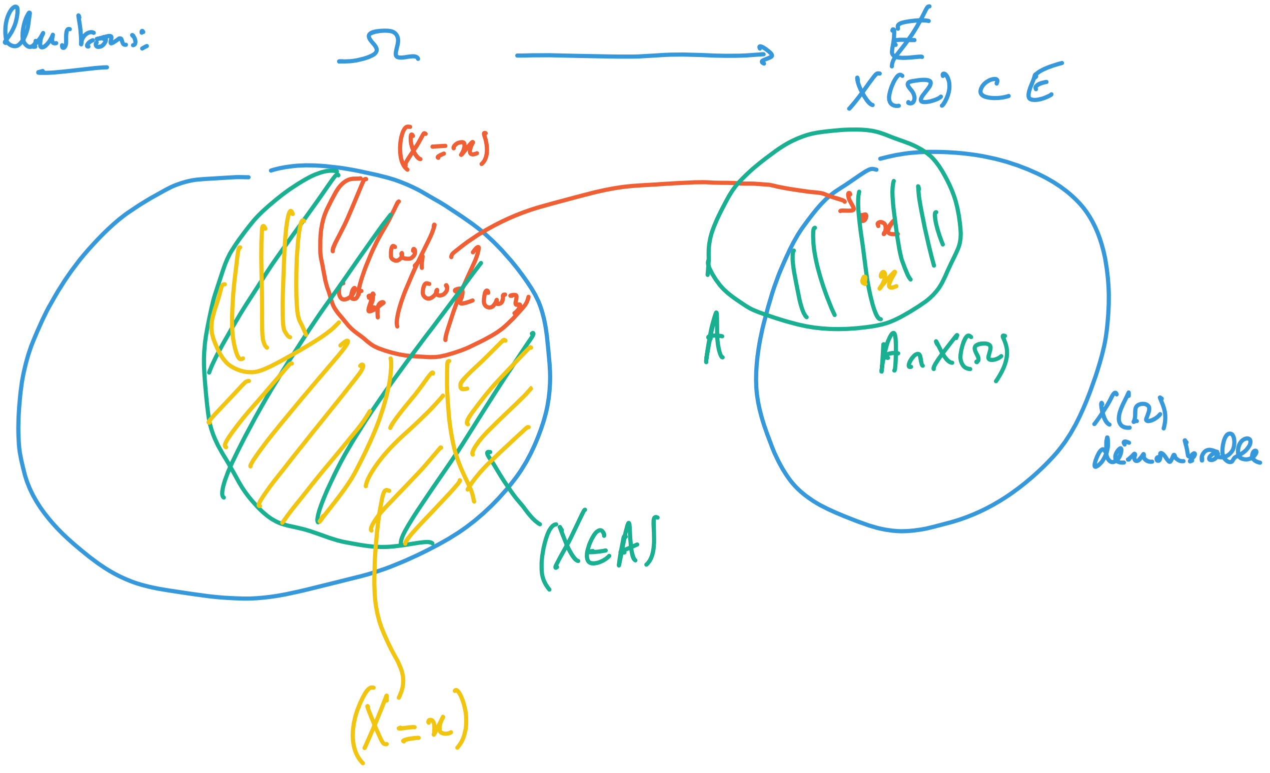
- Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on parle de **v.a. réelle discrète**.
- Lorsque $E = \mathbb{R}^2$, on parle de **couple de v.a. réelles**.

Remarque. *En pratique, on n'explicite pas Ω ni $\mathscr{A}$. Mais la donnée d'une v.a. fournit toute une série d'événements : les $(X = x)$. En combinant ces événements par unions et intersections au plus dénombrables, et en passant au contraire, on connaît beaucoup d'éléments de la tribu.*

Proposition.

- Si A est une partie de E, $(X \in A)$ désigne $\{\omega,\ X(\omega) \in A\} = \displaystyle\bigcup_{x \in A \cap X(\Omega)} (X = x)$. C'est un événement comme union au plus dénombrable d'événements.
- Si X est une v.a. réelle, on définit les événements $(X \leqslant x)$, $(X > x)$ etc.

Illustrons:



Définition. Soit A un événement. On a déjà défini la **fonction indicatrice** de A par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_A : \Omega & \to & \{0,1\} \\ \omega & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{array}$$

Proposition. La fonction indicatrice d'un événement est une variable aléatoire discrète.

Preuve: Soit $A \in \mathcal{A}$.

- $\mathbb{1}_A(\Omega) \subset \{0,1\}$ donc $\mathbb{1}_A(\Omega)$ au plus dénombrable (en fait fini)

- * Est-ce que $(\mathbb{1}_A = 0) \in \mathcal{A}$?

$$\begin{aligned} \omega \in (\mathbb{1}_A = 0) &\iff \mathbb{1}_A(\omega) = 0 \\ &\iff \omega \notin A \\ &\iff \omega \in \overline{A} \end{aligned}$$

donc $(\mathbb{1}_A = 0) = \overline{A}$ est un événement.

  * De même $(\mathbb{1}_A = 1) = A$ est un événement.

Ainsi: $\mathbb{1}_A$ est une v.a discrète.

1.2 Loi

Définition théorique. Soit $X : \Omega \to E$ une v.a. discrète. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on définit :

$$P_X(A) = P(X \in A)$$, appelée loi de X.

C'est une probabilité sur l'espace probabilisable $(E, \mathcal{P}(E))$.

Remarque. *En fait, seuls les éléments de $E \cap X(\Omega)$ « comptent » ; cet ensemble est dénombrable, ce qui explique que l'on puisse choisir $\mathcal{P}(E)$ pour tribu.*

Preuve : $P_X : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$A \longmapsto P(X \in A) = \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} P(X = x)$$

- P_X est à valeurs dans $[0,1]$ car $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

  $P(X \in A) \in [0,1]$ car P proba

- $P_X(E) = P(X \in E) = P(\Omega)$

  car X à valeurs dans E donc $\forall \omega \in \Omega$

  $X(\omega) \in E$ ie $(X \in E)$ est certain.

  $= 1$ car P proba

- σ-additivité. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{P}(E)$, 2 à 2 disjoints.

$$P_X\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = P\left(X \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$$

$$\omega \in \left(X \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \iff X(\omega) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

$$\iff \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } X(\omega) \in A_n$$

$$\iff \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } \omega \in (X \in A_n)$$

$$\iff \omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \in A_n)$$

$$= P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X\in A_n)\Big)$$

union dénombrable disjointe

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(X\in A_n)$$

par σ-additivité de P.

Bref : P_X est une proba sur $(E, \mathcal{P}(E))$

En pratique. La donnée de la loi d'un v.a. discrète X, c'est :

- la donnée de $X(\Omega)$, ensemble au plus dénombrable, parfois appelé abusivement « support » de X ;
- pour chaque $x \in X(\Omega)$, la valeur de $P(X = x)$.

On dit qu'elle est déterminée par la distribution de probabilités discrètes $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Proposition. Pour $A \subset E$ ou $A \subset X(\Omega)$, $P(X \in A) = \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} P(X = x)$.

Preuve : $$(X \in A) = \bigcup_{\substack{\cancel{x \in A} \\ x \in A \cap X(\Omega)}} (X = x)$$

Si X va réelle $$(X \in \mathbb{R}_+) = \bigcup_{x \geq 0} (X = x)$$

non dénombrable

si X va discrète, $X(\Omega)$ au plus dénombrable

donc la plupart des $(X = x)$ pour $x \geq 0$ sont impossibles $(\emptyset)$

$$(X \in \mathbb{R}_+) = \bigcup_{\substack{x \geq 0 \\ x \in X(\Omega)}} (X = x)$$

dénombrable.

Union dénombrable, disjointe, donc, par σ-additivité

$$P(X \in A) = \sum_{\substack{\cancel{x \in A} \\ x \in A \cap X(\Omega)}} P(X = x)$$

Remarque : X va.

$(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ système complet d'événements.

Notation. On note $X \sim Y$ lorsque les deux v.a. X et Y suivent la même loi.

Attention ! c'est différent de $X = Y$

Exemple : On lance une pièce équilibrée 7 fois.

X = nb de piles. Y = nb de faces.

On a $X \sim Y$

et $\forall \omega \quad X(\omega) \neq Y(\omega)$

Exemple :

X = va résultat du dé rouge

Y = va résultat du dé vert.

loi de X ? $\quad X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$

$$\forall x \in [\![1,6]\!], \quad P(X=x) = \frac{1}{6}$$

$$X(\Omega) = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } x \in [\![1,6]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

loi de Y : $\quad Y(\Omega) = [\![1, 6]\!]$

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y=y) = \frac{1}{6}$$

Donc $X \sim Y$ (elles ont la même loi)

<u>On n'a pas $X = Y$!!</u>

$\omega =$ 

$X(\omega) = 2$

$Y(\omega) = 1$

Les 2 v.a X et Y ne sont pas égales

(sinon, $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) = Y(\omega)$)

Exemple. On s'intéresse au jeu du pile ou face infini, et on note X la variable aléatoire donnant le rang du premier lancer qui donne pile. On suppose qu'à chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$, et celle d'obtenir face est $q = 1 - p$.

1. Déterminer la loi de X, appelée **loi géométrique de paramètre** p.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(X \leqslant n)$ et $P(X > n)$.

On note F_k = « face au lancer k »

$P_k = \overline{F_k}$ = « pile au lancer k »

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$

ω = uniquement face, $X(\omega) = +\infty$

$$(X = n) = F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n$$

donc, par indépendance

$$P(X = n) = (1-p)^{n-1} p$$

$P(X = +\infty)$

$= 1 - P(X \in \mathbb{N}^*)$

- $$P(X \leqslant n) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} p$$

somme géométrique

$$= p \cdot \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}$$

$$= 1 - (1-p)^n$$

$$(X > n) = \bigcup_{k > n} (X = k)$$

disjoints

- $P(X > n)$

M1 $$P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p$$

$$= p \cdot (1-p)^n \cdot \frac{1}{1-(1-p)}$$

$$= (1-p)^n$$

R2 $(X > n) = \overline{(X \leq n)}$ $\quad$ pas si $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$

$$P(X > n) = 1 - P(X \leq n)$$

$$= (1-p)^n$$

R3 $(X > n) = F_1 \cap \dots \cap F_n$

donc $P(X > n) = (1-p)^n$ par indép

$$P(X = +\infty) = 0$$

Exemple. Soit X un v.a. sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$, et telle que :

$$\forall n \geqslant 2,\ P(X = n) = \zeta(n) - 1$$

Montrer que X suit une loi de probabilité.

(Mqe X est va $\leftarrow$ mal formulé)

On doit mqe $\cancel{(P(X=n))_{n \geq 2}}$ $(\zeta(n)-1)_{n \geq 2}$ est une distrib. de probabilités

i.e. $\bullet\ \forall n \geq 2 \quad \zeta(n) - 1 \geq 0$

$\bullet\ \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n)-1) = 1$

On rappelle $\displaystyle\zeta(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n} < +\infty \quad \forall n \in [\![2, +\infty[\![$

≥ 1

On calcule dans $[0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ (sommes de termes ≥ 0)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \quad \text{par Fubini positif}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{k}}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

$$= 1$$

où $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$

donc cette somme est télescopique

1.3 Fonction d'une variable aléatoire discrète

Proposition. Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète, et $f : E \to F$ une application quelconque. Alors la composée $f \circ X$, notée $f(X)$, est une variable aléatoire discrète.

Proposition. Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Remarque. *Si X et Y sont des v.a., alors $Z = (X, Y)$ est une v.a. (un couple de v.a. est une v.a. à valeur dans un produit). Donc pour toute fonction f, $f(Z)$ est une v.a.*
Ainsi $X + Y$, XY, $\mathrm{Min}(X, Y)$, $\mathrm{Max}(X, Y)$ sont des v.a.

$\cancel{f \circ X}$ $f(X)$

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{X} & E & \xrightarrow{f} & F \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) & \longmapsto & f(X(\omega)) \end{array}$$

$f(X)$ est une va.

Preuve :

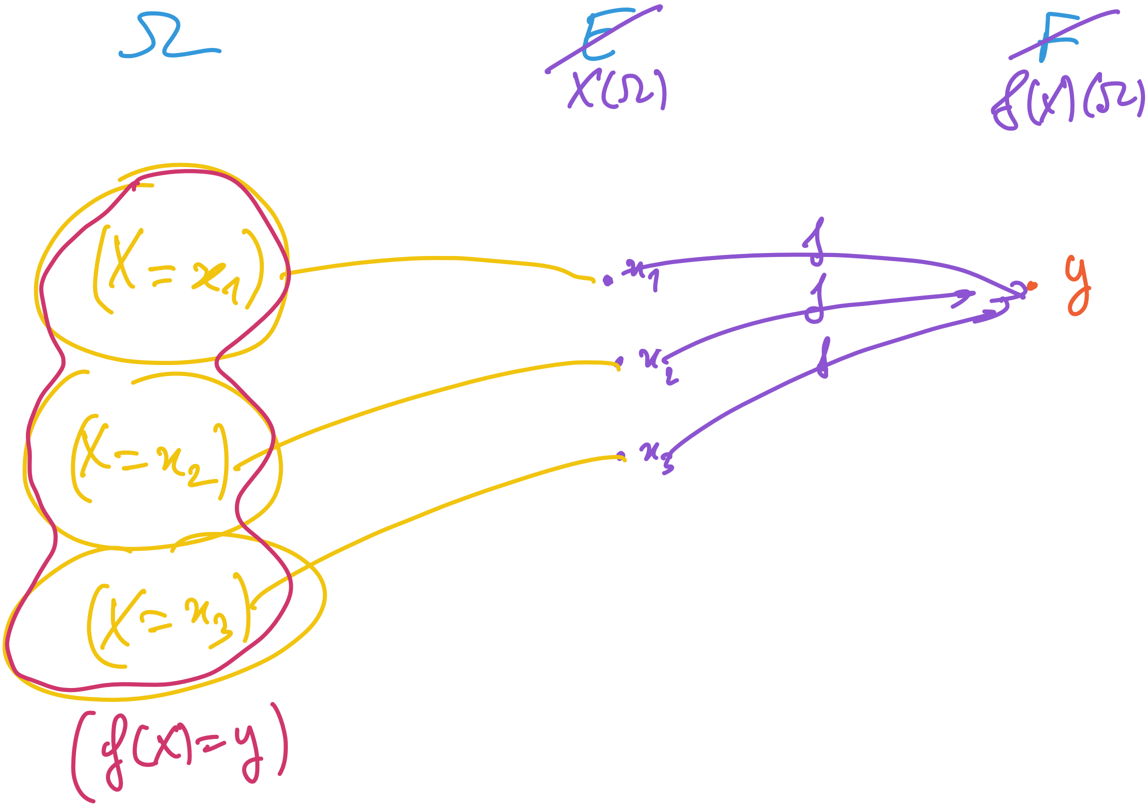
- $f(X)(\Omega) = f(X(\Omega))$ au plus dénombrable car $X(\Omega)$ l'est

- $\forall y \in \cancel{F}\ f(X)(\Omega)$

  $(f(X) = y)$ est un évènement ?

  $$(f(X) = y) = \{\omega \in \Omega \text{ tq } f(X(\omega)) = y\} = \bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} (X = x)$$

  union dénombrable d'évènements.



Ω
$\cancel{E}$
$X(\Omega)$
$\cancel{F}$
$f(X)(\Omega)$
$(X = x_1)$
$(X = x_2)$
$(X = x_3)$
$(f(X) = y)$
x_1
x_2
x_3
f
f
f
y