Bonus: 820.2, 820.3

3 Négligeabilité

Définition. On dit qu'un événement A est **négligeable** lorsque $P(A) = 0$.

Remarque. *L'événement impossible $\varnothing$ est négligeable, mais un événement négligeable n'est pas, en général, impossible.*

Exemple. Dans le jeu de pile ou face infini :

- Montrer que l'événement « n'obtenir que des piles » est négligeable.
- Que penser de l'événement $\underbrace{\text{« obtenir un nombre fini de face »}}_{E}$?

$\omega^1 = FPFPFFPPFFFPP\ldots$

$\omega^2 = \ldots$

$P_k =$ « pile au k^e lancer »

$F_k =$ « face au k^e lancer » $= \overline{P_k}$

$\in \mathcal{A}.$

$\omega \in E \iff$ il n'y a qu'un nb fini de face dans ω

$\iff \exists n \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall k \geq n$, $\omega_k = P$

$\iff \exists n \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall k \geq n$ $\omega \in \underbrace{\{* \ldots * \overset{k}{P} * \ldots *\}}_{P_k}$

$\iff \exists n \in \mathbb{N}^*$ tq $\omega \in \underbrace{\bigcap_{k \geq n} P_k}_{A_n}$

$\iff \omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{k \geq n} P_k \right)$

donc $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{k \geq n} P_k \right)$

donc E est donc un événement, comme union dénombrable d'intersection dénombrable d'événements.

donc $P(E) = P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \underbrace{\bigcap_{k\geq n} P_k}_{A_n}\Big)$

$\forall n \quad A_n \subset A_{n+1}$

donc par continuité croissante,

$$P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\Big)$$

où $P(A_n) = P\Big(\bigcap_{k\geq n} P_k\Big)$

$= 0$ par continuité décroissante, comme hier.

$$P\Big(\bigcap_{k=n}^{N} P_k\Big) \xrightarrow[N\to+\infty]{} P\Big(\bigcap_{k=n}^{+\infty} P_k\Big)$$

$$\shortparallel$$

$\prod_{k=n}^{N} P(P_k)$ par indépendance des P_k.

$$\shortparallel$$

$$\frac{1}{2^{N-n+1}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

Ccl : $P(E) = 0$ ie E est négligeable.

Proposition. Une réunion au plus dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille au plus dénombrable d'événements négligeables.

Dans dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$0 \leq P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} 0$$

$$= 0$$

4 Conditionnement, indépendance

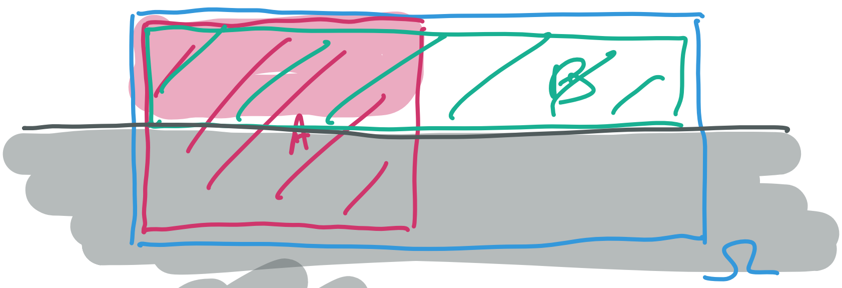
4.1 Probabilité conditionnelle

Définition. Soit B un événement non négligeable. Pour tout événement A, on appelle **probabilité de** A **sachant** B :

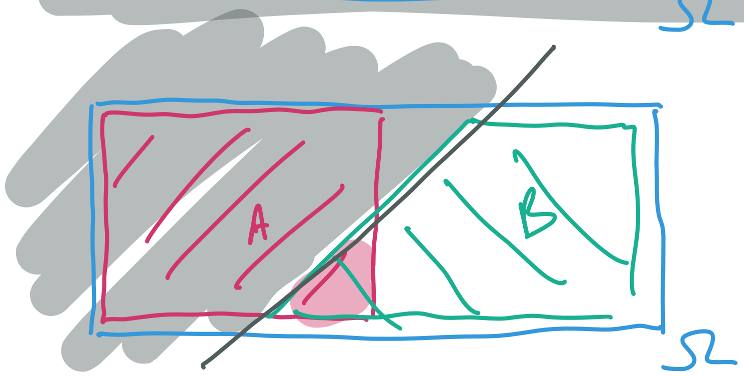
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Remarque. *On utilise aussi la notation* $P_B(A)$, ***probabilité sachant*** B ***de*** A.

Proposition. P_B est une (autre) probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.



$P(A) = \frac{1}{2}$ $\quad P(B) = \frac{1}{2}$



$P(A) = \frac{1}{2}$ $\quad P(B) = \frac{1}{2}$

Preuve: $P_B = P(\cdot \, | B)$

$$P_B : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A \longmapsto \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- $\forall A \quad P_B(A) \in [0,1]$ car $P(A \cap B) \geq 0$, $P(B) > 0$, $P(A \cap B) \leq P(B)$

- $P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

- σ-additivité

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'événements.
2 à 2 disjoints

$$P_B\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\cap B\right)}{P(B)}$$

union disjointe

$$= \frac{P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n\cap B)\right)}{P(B)}$$

par σ-additivité de P

$$= \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n\cap B)}{P(B)}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P(A_n\cap B)}{P(B)}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} P_B(A_n)$$

Donc P_B est une autre proba sur $(\Omega, \mathcal{A})$

Rmq. Lorsque l'on calcule une proba conditionnée par B on écrit "sachant B, on a ..."

4.2 Probabilités composées

Probabilités composées.

Pour deux événements A et B tels que $P(B) > 0$, on a :

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B)$$

Plus généralement, si $A_1, \ldots, A_m$ sont des événements tels que $P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right) > 0$, on a :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) &= P(A_m \mid A_{m-1} \cap \cdots \cap A_2 \cap A_1) \ldots P(A_3 \mid A_2 \cap A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_1) \\ &= \prod_{i=1}^{m} P\Big(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\Big) \end{aligned}$$

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)\ P(B)$$

on crée une "temporalité".

Réaliser $A \cap B$, c'est réaliser B.

et "sachant B", réaliser A.

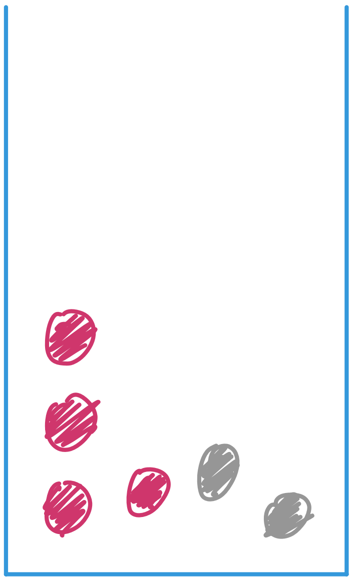
$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A \mid B \cap C)\ P(B \cap C) \\ &= P(A \mid B \cap C)\ P(B \mid C)\ P(C) \end{aligned}$$

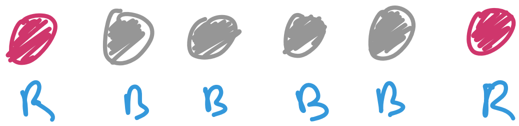
réaliser $A \cap B \cap C$, c'est réaliser C

puis, sachant C, réaliser B

puis sachant B et C, réaliser A.

Exemple. Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire successivement et sans remise n boules de cette urne. Déterminer la probabilité qu'au moins une boule rouge figure dans ce tirage.



$\omega =$ 

$\Omega = \{R, B\}^6$

Définissons des évènements.

E = « au moins une boule rouge a été tirée »

~~B = « on tire une boule blanche »~~

B_k = « on tire une boule blanche au k^e tirage »

R_k = « ——— rouge ——— »

$$R_k = \overline{B_k}$$

$\overline{E}$ = « aucune boule rouge n'est tirée »

= « uniquement des boules blanches »

$$= B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$$

$$= \bigcap_{k=1}^{n} B_k$$

Par les probabilités composées :

$$P(\bar{E}) = P(B_1)\,P(B_2 \mid B_1)\,P(B_3 \mid B_1 \cap B_2) \ldots P(B_n \mid B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1})$$

Calcul de $P(B_k \mid B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1})$:

Sachant $B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1}$, l'urne contient n boules rouges et $n-(k-1)$ boules blanches, donc la proba de tirer une boule blanche est

$$\frac{n-(k-1)}{2n-(k-1)}$$

$$P(E) = 1 - P(\bar{E})$$

$$= 1 - \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} \times \frac{n-2}{2n-2} \times \ldots \times \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

4.3 Probabilités totales

Probabilités totales.

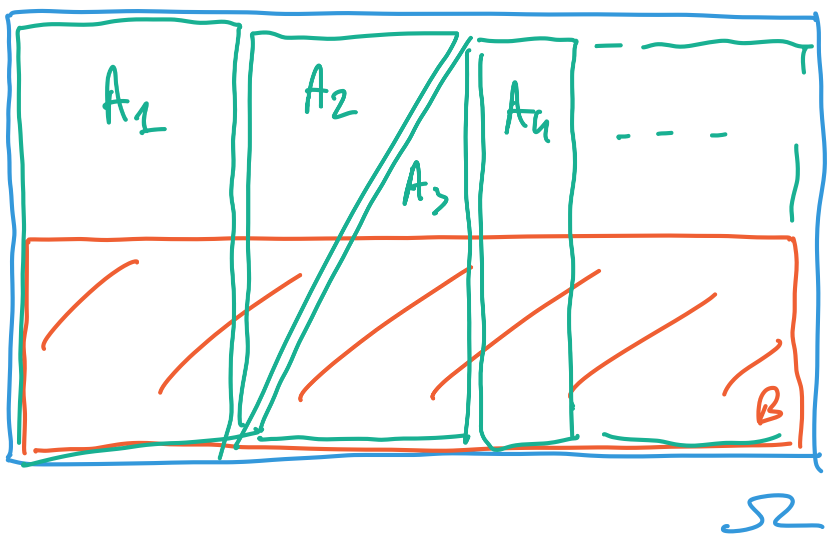
Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet ou quasi-complet d'événements, avec I fini ou dénombrable.
Pour tout événement B :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B|A_i)P(A_i)$$

Remarque.

- *On adopte la convention (raisonnable) que $P(B|A_i)P(A_i) = 0$ lorsque $P(A_i) = 0$.*
- *On précisera toujours le système complet ou quasi-complet d'événements utilisé pour appliquer ce théorème.*
- *Dans le cas fréquent du système complet d'événements $\{A, \overline{A}\}$, la formule s'écrit :*

$$P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap \overline{A}) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})$$



(A_i) système (quasi) complet d'événements,

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B|A_i)P(A_i)$$

Preuve:

1er cas: $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$ (système complet d'événements)

réunion disjointe

$$P(B) = P\Big(\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)\Big)$$

$$= \sum_{i\in I} P(B\cap A_i) \quad \text{par } \sigma\text{-additivité}$$

$$= \sum_{i \in I} P(B \mid A_i) P(A_i)$$

par les probas composées.

Rmq : Si $P(A_i) = 0$, $P(B \mid A_i)$ n'est pas défini.

On convient que $P(B \mid A_i) P(A_i)$ vaut 0.

2e cas : Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système quasi complet d'événements,

on note $C = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$

On a alors : $P(C) = 0$

et $(A_i)_{i \in I} \cup \{C\}$ est un système

complet d'événements

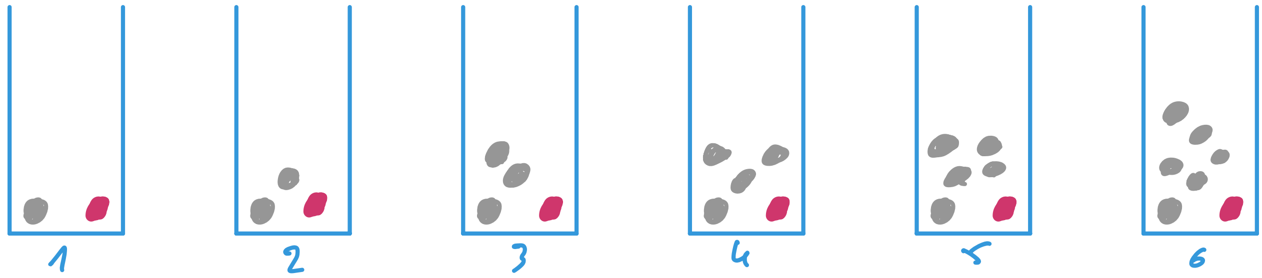
donc $P(B) = \sum_{i \in I} P(B \mid A_i) P(A_i) + \underbrace{P(B \cap C)}_{\leq P(C) = 0}$

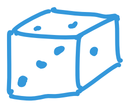
Remarque : on dit que l'on conditionne le calcul par

les A_i.

Utile si expérience à plusieurs cas.

Exemple. On dispose de six urnes numérotées de 1 à 6. L'urne numéro k comporte k boules blanches et une boule rouge. Un joueur lance un dé équilibré, puis choisit une boule dans l'urne correspondant au résultat du dé. Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche.





ω : 2, R   6, B

Peut-on donner Ω ? $[\![1,6]\!] \times \{R, B\}$

Soit B = « on tire une boule blanche »

$= [\![1,6]\!] \times \{B\}$

D_k = « obtenir k avec le dé »

$= \{k\} \times \{R, B\}$

$(D_k)_{1 \leq k \leq 6}$ est un système complet donc

par les probas totales :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{6} P(B \mid D_k) P(D_k)$$

or $P(D_k) = \dfrac{1}{6}$ car le dé est équilibré et sachant D_k, on pioche dans l'urne k

qui contient k boules blanches et 1 boule rouge

donc $P(B \mid D_k) = \frac{k}{k+1}$

CCl : $P(B) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{6}$

4.4 Formule de Bayes

Formule de Bayes.

Soit A et B deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})} \qquad \text{si de plus } P(\overline{A}) \neq 0 \end{aligned}$$

Plus généralement, si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, avec I au plus dénombrable, alors pour tout événement B de probabilité non nulle et tout i :

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum\limits_{k \in I} P(B|A_k)P(A_k)}$$

en adoptant la convention $P(B|A_i)P(A_i) = 0$ si $P(A_i) = 0$.

$$P(A \cap B) = P(A|B)\ P(B)$$

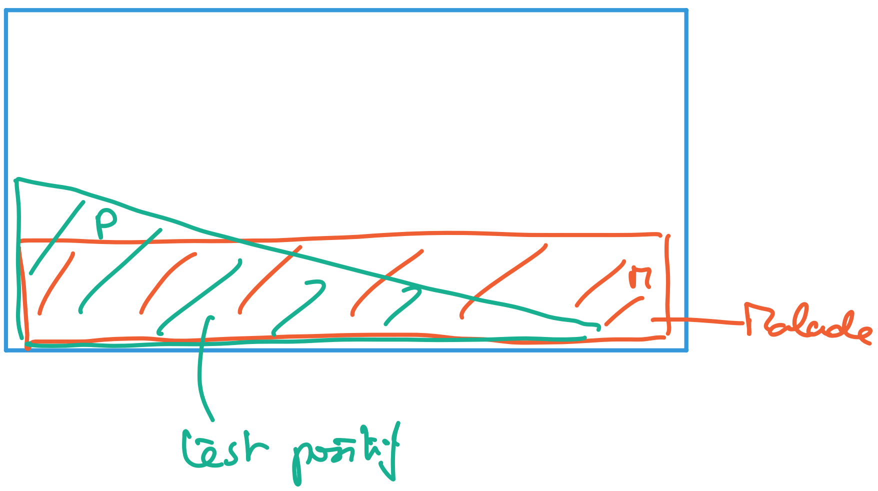
$$= P(B|A)\ P(A)$$

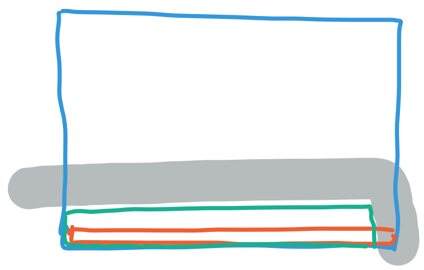
$$P(A|B) = \frac{B(B|A)\ P(A)}{P(B)}$$

<u>Remarque</u> on utilise la formule de Bayes lorsque l'on veut inverser le conditionnement, inverser la temporalité.

Exemple.

1. On dispose d'un test de dépistage d'une maladie. En principe, celui-ci est positif si le patient est malade, mais le test n'est pas fiable à 100 %.
   Plus précisément, si le patient est malade alors le test est positif 99.9 fois sur 100.
   Mais 4 fois sur 1000 il est positif sur une personne non malade.
   On sait qu'environ 2 ‰ de la population est atteinte de la maladie.
   Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif ?





M = « individu est malade »

P = « Son test est positif »

On connait $P(M) = \dfrac{2}{1000}$

$$P(P \mid M) = \frac{999}{1000}$$

$$P(P \mid \bar{M}) = \frac{4}{1000}$$

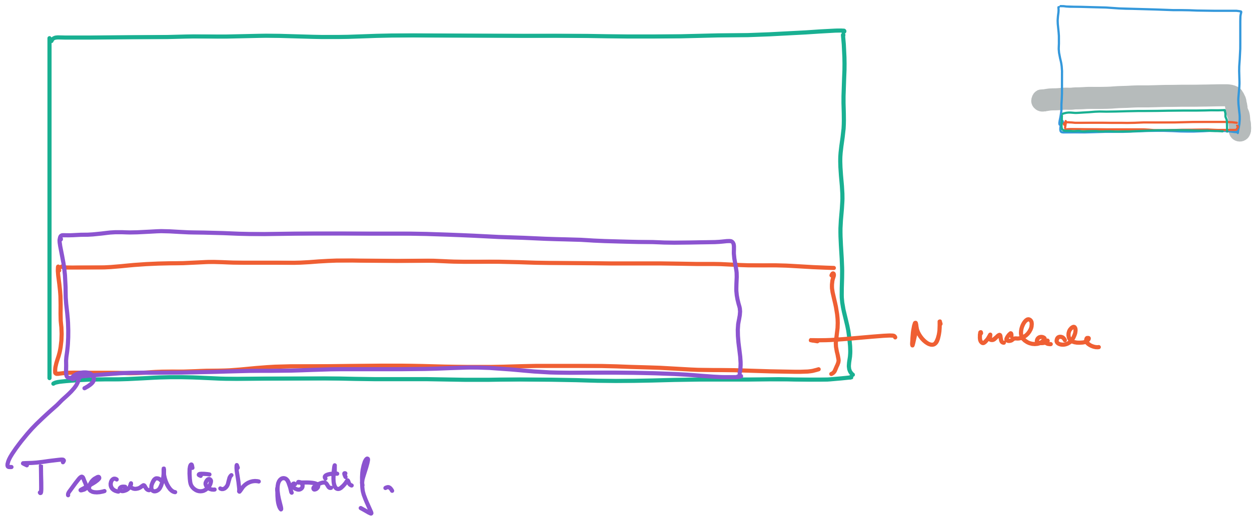
On veut calculer $P(M \mid P)$.

Par la formule de Bayes :

$$P(M \mid P) = \frac{P(P \mid M)\,P(M)}{\cancel{P(P)} \quad P(P \mid M)\,P(M) + P(P \mid \bar{M})\,P(\bar{M})}$$

$$= \frac{999 \cdot 2}{999 \cdot 2 + 4 \cdot 998} \simeq \frac{1}{3}$$

2. On dispose d'un second test de dépistage de la même maladie, moins bon que le premier. Mais on le teste maintenant sur la population qui s'est révelée positive au premier test.
Si la personne est malade le test B est positif 97 fois sur 100. Mais 8 fois sur 1000 il est positif sur une personne non malade. Environ 1/3 de la population testée est atteinte de la maladie.
Quelle est la probabilité qu'une personne testée soit malade sachant que le test B est positif ?



On sait $P(T \mid N) = \frac{970}{1000}$

$P(T \mid \bar{N}) = \frac{8}{1000}$

$P(N) = \frac{1}{3}$

$$P(N \mid T) = \frac{P(T \mid N)P(N)}{P(T \mid N)\, P(N) + P(T \mid \bar{N})P(\bar{N})}$$

$$= \frac{970 \cdot \frac{1}{3}}{970 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{970}{986}$$

$$\simeq 97\%$$

5 Indépendance

5.1 Indépendance de deux événements

Définition. Deux événements A et B sont dits **indépendants** si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

Remarque. *Dans le cas où $P(B) > 0$, cela revient à dire $P(A \mid B) = P(A)$, c'est-à-dire que la réalisation de B n'influe pas sur la réalisation de A.*

Deux événements disjoints ne sont en général pas indépendants : la réalisation de l'un interdit la réalisation de l'autre.

Proposition. Si A et B sont indépendants, alors :

- A et $\overline{B}$ sont indépendants
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

$A \cap B = \emptyset \qquad A \subset \overline{B}$

Preuve:

On suppose A et B indépendants.

$P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}))$ union disjointe

$= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ par σ-additivité

donc $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$= P(A) - P(A)P(B)$

par indépendance

$= P(A)\,(1 - P(B))$

$= P(A)\,P(\overline{B})$

5.2 Indépendance d'une famille ~~finie~~ d'événements

Définition. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements.

- Les événements sont **deux à deux indépendants** si et seulement si, pour tout $i, j \in \{1, \dots, m\}$:
$$i \neq j \implies P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\,P(A_j)$$
- Les événements sont **indépendants** si et seulement si, pour toute partie finie non vide $J \subset I$,
$$P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i)$$

Remarque. *On utilise parfois l'expression « mutuellement indépendants » pour désigner l'indépendance. Des événements peuvent être deux à deux indépendants sans être indépendants.*

Si les A_i sont indépendants, alors ils sont 2 à 2 indépendants.

(J de cardinal 2)

Remarque: analogie avec liberté des familles infinies.

Proposition. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements indépendants. Pour tout i, on définit $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$. Alors $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements indépendants.

Si $(A_1, A_2, A_3, \dots)$ indépendants,

alors $(A_1, \overline{A_2}, A_3 \dots)$ "

Preuve:

On veut montrer l'indépendance de $(B_i)_{i\in J}$ pour tout $J \subset I$ fini.

Quitte à réindexer, on note $J = \{1, \dots, n\}$.

On raisonne par récurrence sur le nombre de contraires qui apparaissent.

- Si $(A_1, \dots, A_n)$ indépendants
  et $B_1 = A_1, \dots\ B_n = A_n$
  alors $(B_1 \dots B_n)$ indépendant

- Si $(A_1 \dots A_n)$ indépendants
  On suppose $(\overline{A_1}, \dots, \overline{A_k}, A_{k+1}, \dots, A_n)$
  indépendants (H.R)
  $\underline{\text{Mq}}$ $(\overline{A_1}, \dots, \overline{A_k}, \overline{A_{k+1}}, A_{k+2}, \dots, A_n)$
  indépendants.

$$A_{k+1} \cup \overline{A_{k+1}} = \Omega$$

donc

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i} \cap \bigcap_{i=k+2}^{n} A_i\right)$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i} \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} A_i\right)$$

$$+ P\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{A_i} \cap \bigcap_{i=k+2}^{n} A_i\right)$$

par σ-additivité

donc par HR

$$\prod_{i=1}^{k} P(\overline{A_i}) \prod_{i=k+2}^{n} P(A_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{k} P(\overline{A_i}) \prod_{i=k+1}^{n} P(A_i) + P\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{A_i} \cap \bigcap_{i=k+2}^{n} A_i\right)$$

donc $P\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{A_i} \cap \bigcap_{i=k+2}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} P(\overline{A_i}) \left[1 - P(A_{k+1})\right] \prod_{i=k+2}^{n} P(A_i)$

Exemple. On lance deux dés discernables, et on considère les événements :

$$A = \text{« le premier dé donne un résultat pair »}$$
$$B = \text{« le second dé donne un résultat pair »}$$
$$C = \text{« la somme des résultats des deux dés est paire »}$$

Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas (mutuellement) indépendants.

Proposition. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements indépendants. Pour tout i, on définit $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$. Alors $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements indépendants.

$P(A) = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{1}{2}$