Préliminaire – inégalité arithmético-géométrique

$\boxed{1}$ On utilise la concavité de la fonction ln et l'inégalité de Jensen :

$$\ln\left(\frac{1}{n}x_1 + \cdots + \frac{1}{n}x_n\right) \geqslant \frac{1}{n}\ln(x_1) + \cdots + \frac{1}{n}\ln(x_n)$$

avant de prendre l'exponentielle.

1. Un développement en série entière

$\boxed{2}$ On a $\varphi(t) = \exp\left((1 - \frac{1}{t})\ln(1-t)\right)$ et

$$\left(1 - \frac{1}{t}\right)\ln(1-t) \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{1}{t} \times (-t) = 1$$

Par continuité de l'exponentielle,

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\varphi(t) = e}$$

On pose désormais $\varphi(0) = e$ en identifiant φ et son prolongement.

$\boxed{3}$ On montre par récurrence forte que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |b_n| \leqslant 1}$$

- $|b_0| = 1$ et le résultat est vrai au rang 0.
- Soit $n \geqslant 1$. On suppose le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$. On a alors

  $$|b_n| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{|b_{n-k}|}{k+1} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

  ce qui prouve le résultat au rang n.

Comme $R(\sum 1x^n = 1)$, on déduit que :

$$\boxed{\sum(b_n t^n) \text{ est de rayon de convergence } \geqslant 1}$$

$\boxed{4}$ Soit $t \in]-1,1[\setminus\{0\}$. φ est dérivable en t et

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\ln(1-t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k} = -\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^{k-2}}{k} = \psi(t)$$

ψ est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ comme fonction DSE de rayon 1 et est en particulier continue en 0. On en déduit que

$$\lim_{t\to 0}\varphi'(t) = \varphi(0)\psi(0)$$

Par théorème de limite de la dérivée, φ est dérivable en 0 à dérivée continue et $\varphi'(0) = \varphi(0)\psi(0)$. Ainsi

$$\boxed{\varphi \in C^1(]-1,1[) \text{ et } \forall t \in]-1,1[,\ \varphi'(t) = \varphi(t)\psi(t)}$$

$\boxed{5}$ Soit $t \in]-1,1[$. Posons (licite avec la question $\boxed{3}$)

$$g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k$$

On peut dériver terme à terme une série entière (sur l'intervalle ouvert de convergence) et ainsi

$$g'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) b_{k+1} t^k$$

Par théorème sur le produit de séries entières,

$$-g(t)\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \quad \text{avec} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_{n-k}}{k+2} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{b_{n+1-k}}{k+1} = -(n+1)b_{n+1}$$

On a donc $g(t)\psi(t) = g'(t)$. Comme $g(0) = b_0 = -1$, $-e.g$ est solution du même problème de Cauchy que φ et ainsi $\varphi = -e.g$ (l'équation différentielle est linéaire d'ordre 1, normalisée et à coefficients continus : le théorème de Cauchy-linéaire s'applique). Ainsi

$$\boxed{\forall t \in \left]-1, 1\right[, \quad \varphi(t) = e\left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k t^k\right)}$$

2. Inégalité de Carleman-Yang

$\boxed{6}$ Pour tout choix des $c_i > 0$, on a

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{k=1}^{n} c_k\right)^{-\frac{1}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k c_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

On utilise l'inégalité arithmético-géométrique avec le second terme (puis on multiplie par le premier qui est > 0) et on obtient (on change le premier indice du membre droite qui est muet)

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} c_k a_k$$

Toutes les quantités étant positives, on peut les sommer (travail dans $[0, +\infty]$) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{n} c_k a_k\right)$$

Les termes étant tous positifs, on peut intervertir l'ordre des sommes (théorème de Fubini), ce qui donne

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \left(\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{n} c_k a_k\right)}$$

$\boxed{7}$ On pose alors $c_i = \dfrac{(i+1)^i}{i^{i-1}}$ et un télescopage multiplicatif apparaît lors du produit :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}$$

La question précédente donne ainsi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k a_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

Comme $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, les termes se télescopent :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k a_k}{k+1}$$

et avec l'expression de c_k :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{1-k} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} \varphi \left(\frac{1}{k+1} \right) a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \varphi \left(\frac{1}{k+1} \right) a_k$$

En remplaçant par l'expression de φ obtenue en question $\boxed{??}$, on conclut que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant e \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{(k+1)^i} \right) a_k}$$