Préliminaire – inégalité arithmético-géométrique

$\boxed{1}$ Démontrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

1. Un développement en série entière

Soit φ la fonction définie par :

$$\forall t \in \left]-1, 1\right[\setminus \{0\},\ \varphi(t) = (1-t)^{1-1/t}$$

et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} b_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} b_{n-k} \end{cases}$$

$\boxed{2}$ Justifier que φ est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur de son prolongement en 0.

On notera toujours φ ce prolongement.

$\boxed{3}$ Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|b_n| \leqslant 1$. En déduire une inégalité sur le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} b_k t^k$.

$\boxed{4}$ Démontrer que, pour tout $t \in \left]-1, 1\right[$:

$$\varphi'(t) = \varphi(t)\psi(t)$$

où

$$\forall t \in \left]-1, 1\right[,\ \psi(t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2}\, t^n$$

$\boxed{5}$ Conclure alors que :

$$\forall t \in \left]-1, 1\right[,\ \varphi(t) = \mathrm{e}\left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k t^k\right)$$

2. Inégalité de Carleman-Yang

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs.

$\boxed{6}$ Démontrer que, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} c_k a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{-1/n}$$

$\boxed{7}$ En considérant $c_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$, en déduire l'inégalité de Carleman-Yang :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leqslant \mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(n+1)^k}\right) a_n$$