Pour jé : 820.1, 820.7

Espaces probabilisés

1 Espaces probabilisables, espaces probabilisés

1.1 Tribu, espace probabilisable

Définition. Soit Ω un ensemble. On appelle **tribu** sur Ω tout $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

univers

- $\varnothing \in \mathscr{A}$
- $\mathscr{A}$ est stable par passage au contraire : $A \in \mathscr{A} \implies \overline{A} \in \mathscr{A}$
- $\mathscr{A}$ est stable par union dénombrable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

Remarque. *$\mathscr{A}$ est bien une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, donc ses éléments sont des parties de Ω.*

Remarque. *On dit parfois que $\mathscr{A}$ est une σ-algèbre.*

les éléments de A sont les événements.

Proposition. Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω. Alors :

- $\Omega \in \mathscr{A}$
- $\mathscr{A}$ est stable par intersection dénombrable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.
- $\mathscr{A}$ est stable par union ou intersection finie.

Exemple.

- $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω, appelée parfois la **tribu discrète**
- $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu sur Ω, appelée parfois la **tribu grossière**
- Pour $A \subset \Omega$, $\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu, parfois appelée la **tribu engendrée par** A

Preuve : • $\Omega = \overline{\varnothing}$ donc $\Omega \in \mathscr{A}$

• $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right)}$

car les A_n sont dans $\mathcal{A}$

donc les $\overline{A_n}$ sont dans $\mathcal{A}$

donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \in \mathcal{A}$

donc $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}} \in \mathcal{A}$.

- Soit $A_0, \dots, A_m \in \mathcal{A}$

On pose $A_{m+1} = A_{m+2} = \dots = \phi$

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$$
$$\parallel$$
$$\bigcup_{k=0}^{m} A_k \cup \phi = A_0 \cup \dots \cup A_m$$

Tribu = ensemble des événements

contient ϕ et Ω

stable par $\cup$ et $\cap$ (au plus dénombrable)

stable par passage au contraire

Exemple.

- $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω, appelée parfois la **tribu discrète**
- $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu sur Ω, appelée parfois la **tribu grossière**
- Pour $A \subset \Omega$, $\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu, parfois appelée la **tribu engendrée par** A

Définition. Lorsque $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω, on dit que $(\Omega, \mathscr{A})$ est un **espace probabilisable**. Ω s'appelle **l'univers**, et les éléments de $\mathscr{A}$, qui sont des parties de Ω, s'appellent les **événements**. Retenons que les événements sont donc des **collections d'épreuves**.

A évent

$A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3 \dots$

$A \in \mathscr{A}$

$A \subset \Omega$

Vocabulaire.

- Pour A événement, $\overline{A}$ est l'événement contraire.
- Pour A, B événements, $A \cap B$ est l'événement « A et B »
- Pour A, B événements, $A \cup B$ est l'événement « A ou B »
- Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les événements sont **disjoints** ou incompatibles.
- $\varnothing$ est l'événement impossible, Ω est l'événement certain.

Vocabulaire.

- Un élément de l'univers $\omega \in \Omega$ est une **épreuve** ou **réalisation de l'expérience aléatoire**
- Pour A événement, $\omega \in A$ signifie que ω **réalise** A
- Si A et B sont des événements, $A \subset B$ signifie que la réalisation de A implique la réalisation de B.

Définition. Une famille $(A_i)_{i \in I}$ au plus dénombrable d'événements est un **système complet** d'événements si les événements sont deux à deux disjoints, et l'union certaine :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$$

recouvrement disjoint de Ω

$\cancel{P : \Omega} \longrightarrow$

$P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$

A évènement $\longmapsto P(A)$ valeur

1.2 Probabilité, espace probabilisé

Définition. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $P : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ telle que :

- P est à valeurs dans $[0, 1]$
- $P(\Omega) = 1$
- P satisfait la propriété de σ-additivité, i.e. si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints, alors :

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Proposition. On a aussi les propriétés suivantes :

- $P(\varnothing) = 0$
- Pour A, B événements disjoints, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Pour $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ famille finie d'événements deux à deux disjoints,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

"σ-additivité"

Définition. Lorsque P est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$, on dit que $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un **espace probabilisé**.

Preuve : • Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déf par $A_0 = \Omega$, $A_n = \emptyset$ $\forall n \geq 1$

famille dénombrable d'événements 2 à 2 disjoints

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = P(A_0) + P(A_1) + \dots$$

$$P(\Omega) = P(\Omega) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(\emptyset)$$

donc $P(\emptyset) = 0$

• $A_0 = A$ $\quad A_1 = B$ $\quad A_n = \emptyset$ $\forall n \geq 2$

$$P(A \cup B) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$ par σ-additivité, famille d'événements disjoints 2 à 2

$$= P(A) + P(B) + 0$$

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ $\quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

1.3 Cas très simple : probabilité sur un univers fini

Si Ω est fini, on prend $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, et on simplifie la propriété de σ-additivité en :

Si A et B sont deux événements disjoints, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ~~$P(\omega_i)$~~

Notant $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, les événements $\{\omega_i\}$ s'appellent **événements élémentaires**, et la donnée des $P(\{\omega_i\})$ (notée plutôt $P(\omega_i)$) définit P, en posant pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$.

Exemple. Avec $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de la probabilité uniforme, calculer $P(A)$ où A est l'événement des épreuves paires.

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) = \{ \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots \{\omega_N\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \dots \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \dots \}$$

$$P(A) = P\Big(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\Big)$$ A fini

$$= \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$ par σ-additivité

Rappel. Pour Ω fini de cardinal N, la **probabilité uniforme** est l'unique probabilité telle que :

$$\forall \omega \in \Omega,\ P(\{\omega\}) = \frac{1}{N}$$

et alors, pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

Exemple. Avec $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de la probabilité uniforme, calculer $P(A)$ où A est l'événement des épreuves paires.

$A = \{2, 4, 6\}$

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card} A}{\mathrm{Card}\, \Omega} = \frac{3}{6}$$

Exemple. Lorsque l'on joue au jeu de l'oie, on lance simultanément deux dés équilibrés à six faces.

- Un univers naturel pour représenter les épreuves possibles :

  ⚀⚀ ⚀⚁ ⚀⚂ … ⚂⚅ ⚃⚀ ⚃⚁ … ⚃⚅ ⚄⚅ ⚅⚅

  est :

  $$\Omega = [\![1, 6]\!]^2$$

  que l'on munit de la probabilité uniforme.

- « Faire un double-six » est un événement élémentaire, représenté par le singleton $\{(6, 6)\}$.

- « Faire au moins 10 » est un événement, représenté dans Ω par le sous-ensemble :

  $$B = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

- Mais au jeu de l'oie, plutôt que ω, c'est le *nombre* somme des valeurs obtenues avec les deux dés qui nous intéresse. On note X la v.a. de la somme des valeurs obtenues. On a alors :

  $$X\big((6, 6)\big) = 12 \text{ et } B = (X \geqslant 10)$$

$\omega \in B$?

1.4 Cas simple : probabilité sur un univers dénombrable

Si Ω est dénombrable, on prend aussi $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Notant $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots\}$, les événements $\{\omega_i\}$ s'appellent **événements élémentaires**, et la donnée d'une famille $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels positifs sommable et de somme 1 permet de définir une unique probabilité P telle que $P(\{\omega_i\}) = p_i$ pour tout i. On a encore, pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$.

Exemple. Avec $\Omega = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) = \frac{1}{2^n}$, calculer $P(A)$ où A est l'événement des épreuves paires.

On définit P en définissant $P(\{\omega_i\}) = p_i$

$\cancel{P(\omega_i)}$

les p_i sont ≥ 0 (et ≤ 1)

$$P(\Omega) = 1$$

$$\cancel{P\Big(\bigcup_{\omega\in\Omega} \{\omega\}\Big)} \quad P\Big(\bigcup_{i=0}^{+\infty} \{\omega_i\}\Big)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} P(\{\omega_i\})$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} p_i$$

Exemple : $A = \{ n \in \mathbb{N}^*, \ n \text{ pair} \}$

$$= \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \{2p\} \quad \text{union disjointe}$$

donc, par σ-additivité

$$P(A) = \sum_{p=1}^{+\infty} P(\{2p\})$$

$$= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2p}} \qquad \text{somme géométrique}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{3}$$

1.5 Exemple d'un univers non dénombrable : le jeu de pile ou face

Exemple. Prenons l'exemple de $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$, qui n'est pas dénombrable. Il modélise l'expérience consistant à tirer une infinité de fois à pile ou face.

- Pour mieux comprendre, il est conseillé de « mimer » quelques réalisations de l'expérience aléatoire :

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= FPFPPFPFFPPFPFFP\ldots & & \\
\omega^2 &= FFPFFPFPPFPFFPPF\ldots & & \\
\omega^3 &= FFFFFFFFFFFFFFFF\ldots & & \text{uniquement des faces} \\
\omega^4 &= PFPFPFPFPFPFPFPF\ldots & & \text{alternance parfaite pile/face}
\end{aligned}$$

- On admet qu'il n'est pas possible de choisir pour tribu l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$, qui est trop gros, ce qui obligera à définir une probabilité nulle pour chaque événement élémentaire.

$\mathcal{A}$?

$\mathcal{A}$ tribu contient les P_k et les F_k
et $\emptyset$ et Ω
et les $\cup$ et $\cap$ au plus dénombrables de P_k et F_k

- Définissons :

$$P_k = \{\omega \in \{P, F\}^{\mathbb{N}^*},\ \omega_k = P\} = \text{« le } k\text{-ième lancer a donné pile »}$$
$$F_k = \overline{P_k} = \{\omega \in \{P, F\}^{\mathbb{N}^*},\ \omega_k = F\} = \text{« le } k\text{-ième lancer a donné face »}$$

que l'on appellera entre nous **événements primitifs**.

- Par exemple

$$P_3 = \text{« le troisième lancer a donné pile »}$$

Cet événement est réalisé par ω^2 et ω^4, mais pas par ω^1 ni ω^3.

- Une façon de comprendre l'événement P_2 est d'écrire :

$$P_2 = \{\star P \star\star\star\star\star\star\ldots\} \subset \Omega$$

On pourra définir $P(F_k) = \frac{1}{2}$

- On admet que l'on peut définir une tribu $\mathscr{A}$ contenant les événements primitifs. Celle-ci contient donc aussi les événements obtenus par unions et intersections au plus dénombrables d'événements primitifs.

- Par exemple, on définit des événements en posant :

$$E_1 = F_1 \cap P_2 \cap F_3,\ E_2 = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k,\ E_3 = P_3 \cap F_3$$

On peut alors se demander si les épreuves précédentes réalisent ou non ces événements.

- On note X le rang d'apparition du premier pile : c'est une v.a. avec $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et :

$$X(\omega^1) = 2,\ X(\omega^2) = 3,\ X(\omega^3) = +\infty \text{ et } X(\omega^4) = 1$$

L'épreuve ω^2 réalise l'événement $(X = 3)$, et $(X = 3) = F_1 \cap F_2 \cap P_3$.

- Fixons $p \in]0,1[$. Il existe une probabilité P définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ par :

$$P(P_k) = p,\ P(F_k) = 1 - p,$$

et ce qui sera plus tard l'indépendance de P_i et P_j pour $i \neq j$, de sorte que, par exemple :

$$P(E_1) = (1-p)p(1-p) = p(1-p)^2$$

$$E_1 = F_1 \cap P_2 \cap F_3,$$

$$\omega \in E_1 \iff \omega = F\,P\,F\,*\,*\,*\,\cdots$$

on verra F_1, P_2, F_3 sont indépendants

donc

$$P(E_1) = P(F_1) \times P(P_2) \times P(F_3)$$

1.6 Espaces probabilisés discrets

Définition. Soit Ω un ensemble. Une **distribution de probabilités discrètes** sur Ω est une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$, indexée par Ω, et de somme 1.

Le **support** de cette distribution de probabilité est l'ensemble des ω tels que $p_\omega > 0$.

Proposition. Le support d'une distribution de probabilités discrète est au plus dénombrable.

Définition. Soit Ω un ensemble, et $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilités discrètes. On peut munir Ω de la tribu $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité définie sur les événements élémentaires par $P(\omega) = p_\omega$.

$(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ distrib. de probabilités

$$\iff \begin{cases} \forall\omega \quad p_\omega \geqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1 \end{cases}$$

<u>Rmq</u>: $\Omega' = \{\omega \text{ tq } p_\omega > 0\}$ est au plus dénombrable.

2 Propriétés des probabilités

Dans toute la suite du chapitre, on considère $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

2.1 Croissance

Proposition. Pour A et B deux événements, si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$.

Preuve :

$$B = A \cup (B \setminus A)$$ union disjointe

donc $$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geqslant 0}$$

$$\geqslant P(A)$$

2.2 Des réunions

Proposition.

- Soit $(A_n)_n$ est une suite d'événements deux à deux disjoints, alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.
- Soit $(A_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est une famille finie d'événements deux à deux disjoints, alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \sum_{n=0}^{N} P(A_n)$.

Proposition. Soit A et B deux événements. Alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Preuve $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$ union disjointe

$B = (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B))$ "

donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A \cap B)$

et $P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A \cap B)$

par différence ...

Théorème de continuité croissante.

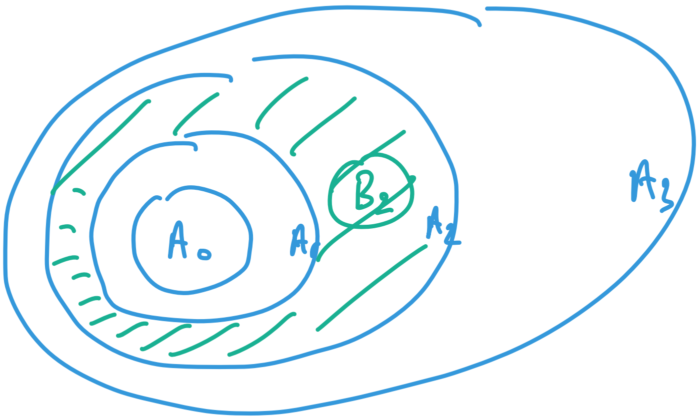
> Soit $(A_n)_n$ une suite croissante (pour l'inclusion) d'événements, i.e. $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n. Alors :
>
> $$P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

Corollaire. Soit $(A_n)_n$ une suite quelconque d'événements. Alors :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

Remarque. *C'est ce théorème auquel on fera référence lorsque l'on a envie de parler d'événement-limite.*

Preuve :



On pose $B_0 = A_0$

$B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ $\quad \forall n \geq 1$

On a $A_n = B_n \cup A_{n-1}$

$= \bigcup_{k=0}^{n} B_k$ par récurrence.

union disjointe

donc $P(A_n) = \sum_{k=0}^{n} P(B_k)$ par σ-additivité

$= \sum_{k=1}^{n} \big(P(A_k) - P(A_{k-1}) \big) + P(B_0)$

en effet $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ $\quad A_k = B_k \cup A_{k-1}$ union disjointe

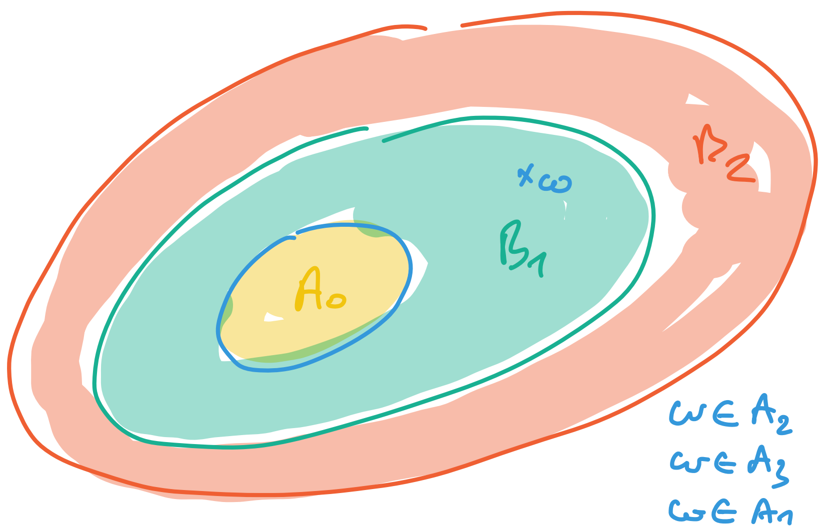
- Mque $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

$\boxed{\supset}$ $\forall n,\quad B_n \subset A_n$

donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$\boxed{\subset}$ Soit $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

ie $\exists k\in\mathbb{N}$ tq $\omega\in A_k$



$\omega\in A_2$
$\omega\in A_3$
$\omega\in A_1$
$\vdots$

- Si $\omega\in A_0$, $\omega\in B_0$
- Sinon, on note $k_0 = \min\{k\in\mathbb{N}$ tq $\omega\in A_k\}$

existe car partie de $\mathbb{N}$ non vide

ie $\omega\in A_{k_0}$ et $\omega\notin A_{k_0-1}$

donc $\omega\in B_{k_0}$

Donc $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

- Les B_n sont 2 à 2 disjoints

Si $n < m$ et $\omega \in B_m$

alors $\omega \in A_m \setminus A_{m-1}$

donc $\omega \notin A_{m-1}$ et $B_n \subset A_{m-1}$

donc $\omega \notin B_n$

Ainsi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ est disjointe

- Donc, par σ-additivité

$$P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(B_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n)$$

$$\Big\uparrow N \to +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{N} P(B_n)$$

or $$\sum_{n=0}^{N} P(B_n) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n) - P(A_{n-1}) \quad + P(B_0)$$

$$= P(A_N)$$ car $P(B_0) = P(A_0)$

Bref : $P(A_N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$

<u>En pratique</u> on utilise souvent le corollaire.

Soit $(A_n)_n$ suite d'événements

Th de continuité croissante.

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

suite des unions partielles

<u>Preuve</u>: appliquer le th à la suite des unions partielles.

car $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Proposition (sous-additivité). Soit $(A_n)_n$ une suite quelconque d'événements.

Alors, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

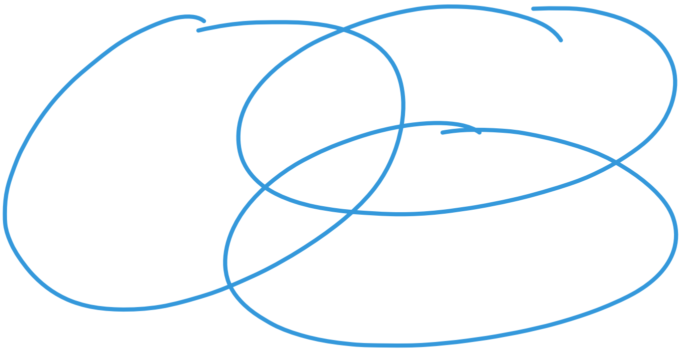
Remarque. *On ne perdra pas de vue que l'inégalité* $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant 1$ *reste vraie, et parfois meilleure que l'inégalité précédente.*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\leq P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) \ldots$$

$$- P(A \cap \ldots)$$



$$P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$$

2.3 Continuité décroissante

Théorème de continuité décroissante.

Soit $(A_n)_n$ une suite décroissante (pour l'inclusion) d'événements, i.e. $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout n. Alors :

$$P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

Corollaire. Soit $(A_n)_n$ une suite quelconque d'événements. Alors :

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

Remarque. *C'est ce théorème auquel on fera référence lorsque l'on a envie de parler d'événement-limite.*

Preuve: $(\overline{A_n})_n$ est une suite croissante

donc, par continuité croissante

$$P(\overline{A_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right)$$

donc $P(A_n) = 1 - P(\overline{A_n})$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right)$$

$$= P\left(\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}}\right)$$

$$= P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

En pratique: $P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$

intersection partielle

3 Négligeabilité

Définition. On dit qu'un événement A est **négligeable** lorsque $P(A) = 0$.

Remarque. *L'événement impossible $\varnothing$ est négligeable, mais un événement négligeable n'est pas, en général, impossible.*

Exemple. Dans le jeu de pile ou face infini :

- Montrer que l'événement « n'obtenir que des piles » est négligeable.
- Que penser de l'événement « obtenir un nombre fini de face » ?

Proposition. Une réunion au plus dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

E = « n'obtenir que des piles »

$$= P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4 \cap P_5 \cdots$$

$$= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} P_k = \bigcap_{k=1}^{+\infty} P_k$$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} P_k\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} P_k\right) = P(E)$$

par continuité décroissante

$\|$ par indépendance

$$\prod_{k=1}^{n} P(P_k) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $\underline{P(E) = 0}$

Définition. On dit qu'un événement A est **presque sûr** lorsque $P(A) = 1$.

Remarque. *L'événement certain Ω est presque sûr, mais un événement presque sûr n'est pas, en général, certain.*

Proposition. A est presque sûr si et seulement si $\overline{A}$ est négligeable.

Proposition. Une intersection au plus dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.

Définition. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable d'événements. On dit que c'est un **système quasi-complet** d'événements lorsque les A_i sont deux à deux disjoints, et de reunion presque sûre :

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1$$