Pour sa : forum 9h

Pour lu : DS

Pour ve : entretiens individuels

<u>sujet blanc</u>

$$\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$$

$$P \longmapsto \text{le reste dans la div eucl de } P \text{ par } B$$

→ réfléchir à l'unicité pour φ linéaire.

<u>Rmq</u> : $\lambda_i < 0$

et $s_i^2 = \lambda_i$ donc $s_i \in \mathbb{C}$

$s_i \notin \mathbb{R}$

⚠ déf $\mathrm{Rac}(A)$ partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\mathrm{Rac}(A) \subset \cancel{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$

$= \emptyset$

Sommabilité, sommes

1 Sommes finies

1.1 Quelques sommes finies classiques

Résultat.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{array}{l} 1+2+\dots+(n-1)+n \\ n+(n-1) \quad +2 \quad +1 \\ \hline n\times(n+1) \quad = 2S \end{array}$$

Résultat.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Remarque. *On peut en déduire que* $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ *en développant* $(k+1)^4$ *par la formule du binôme et en sommant pour* $k = 0, \dots, n$.

Résultat.

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} 1\,\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad \sum_{k=1}^{n} x^k = \begin{cases} x\,\dfrac{1-x^{n}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Résultat.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (x+1)^n$$

1.2 Manipulation des sommes finies doublement indexées

Proposition. Si I et J sont deux ensembles finis et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels ou de complexes, la commutativité (et l'associativité) de l'addition permet de justifier :

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in I}\left(\sum_{i\in J} a_{i,j}\right)$$

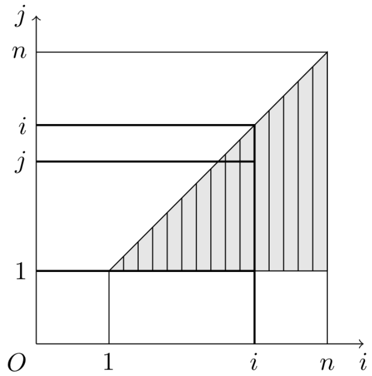
Remarque. *La distributivité de la multiplication sur l'addition permet d'écrire :*

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j$$

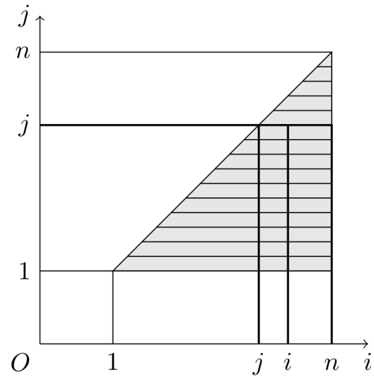
Remarque. *On parle de sommes triangulaires lorsque les $a_{i,j}$ sont nuls pour $i < j$ par exemple. Dans ce cas :*

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}\right)$$

formule qu'il convient de retrouver par le schéma suivant :



D'abord, i varie de 1 à n, puis, pour chaque i fixé, j varie de 1 à i



D'abord, j varie de 1 à n, puis, pour chaque j fixé, i varie de j à n

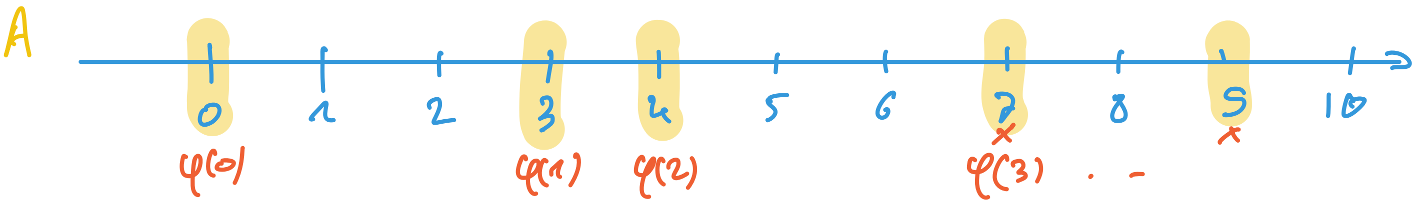
2 Ensembles dénombrables

2.1 Parties de $\mathbb{N}$

Proposition. Toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

↑ injection/surjection.

Soit $A \subset \mathbb{N}$



On suppose A non fini. Mq A est en bijection avec $\mathbb{N}$.

ie $\exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow A$ bijective.

On définit φ par récurrence.

On pose $\varphi(0) = \min(A)$ (existe car A partie non vide de $\mathbb{N}$)

On suppose $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ sont construits

On pose $\varphi(n+1) = \min\left(A \setminus \{\varphi(0), \dots \varphi(n)\}\right)$ "

φ est injective car strictement croissante.

surjective [...]

2.2 Dénombrabilité

Définition. Un ensemble A est **dénombrable** s'il existe une bijection entre A et $\mathbb{N}$.
Un ensemble A est **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable.

Proposition. Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Corollaire. Une partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.

Remarque. *Dire qu'un ensemble est au plus dénombrable, c'est que l'on peut énumérer ses éléments, via la bijection de la définition.*

$A = \{ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \text{Partie de } \mathbb{N} & \longrightarrow & A \\ & n & \longmapsto & x_n \end{array}$$

bijection

Si A est au plus dénombrable,

On peut la décrire $A = \{ x_n, n \in N \}$ où $N \subset \mathbb{N}$.

2.3 Exemples et contre-exemples

Exemple. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exemple. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Lemme. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Explication pour $[0,1)$ non dénombrable (procédé diagonal)

Par l'absurde, on suppose $[0,1)$ dénombrable, donc on peut énumérer ses éléments : $[0,1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$

On écrit chaque x_k sous forme décimale :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}\,x_{11}\; x_{12}\; x_{13}\; x_{14}\; x_{15}\; \dots & 0{,}13574\\
x_2 &= 0{,}\,x_{21}\; x_{22}\; x_{23}\; x_{24}\; x_{25}\; \dots & 0{,}92611\\
x_3 &= 0{,}\,x_{31}\; x_{32}\; x_{33}\; x_{34}\; x_{35}\; \dots & 0{,}13912\\
x_4 &= 0{,}\,x_{41}\; x_{42}\; x_{43}\; x_{44}\; x_{45}\; \dots & 0{,}14325
\end{aligned}
$$

On considère

$$y = 0{,}\,y_1\; y_2\; y_3\; y_4\; y_5\; \dots \qquad 0{,}8607\dots$$

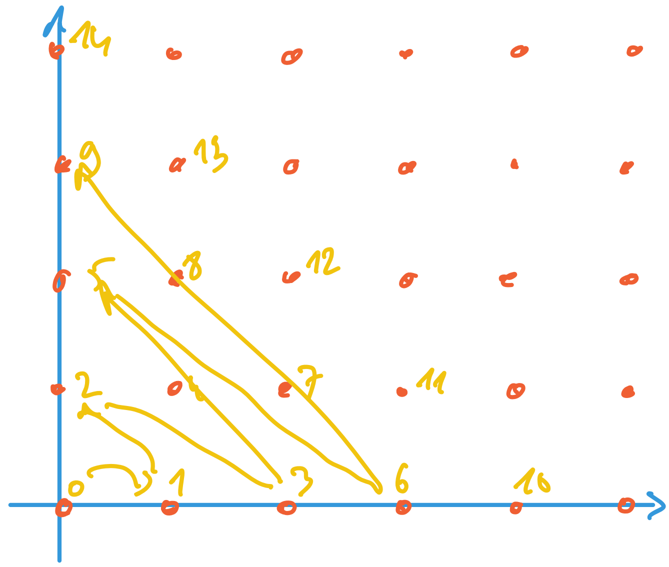
où $y_k = 9 - x_{kk}$

On a $y \in [0,1)$, et $\forall k$, $y_k \neq x_{kk}$

donc $y \neq x_k$

Contredit l'énumération des élts de $[0,1)$.

$\mathbb{N}^2$ est dénombrable



$\mathbb{N}^2$

On peut l'énumérer.

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$$
$$n \longmapsto (\ \ ,\ \ )$$

à définir.

<u>Autre idée</u> :
$$\varphi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(p,q) \longmapsto 2^p(2q+1)$$

<u>surjective</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, déc en facteurs premiers

$$n = 2^p \times \text{impair}$$
$$= \varphi(p,q)$$

<u>injective</u> : Si $\varphi(p,q) = \varphi(p',q')$

donc $2^p(2q+1) = 2^{p'}(2q'+1)$

donc $p = p'$ (unicité déc fact. premiers)

donc $q = q'$.

2.4 Opérations sur les ensembles au plus dénombrables

Proposition. Si A_1, ..., A_p sont au plus dénombrables, alors le produit cartésien $A_1 \times \cdots \times A_p$ est au plus dénombrable.

Preuve : cas où $p = 2$

on traite ici le cas dénombrable.

Soit A_1, A_2 ~~au plus~~ dénombrables.

Soit $\varphi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow A_1$ bijection

$\varphi_2 : \mathbb{N} \longrightarrow A_2$ "

On pose alors :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N}^2 &\longrightarrow A_1 \times A_2 \\ (p, q) &\longmapsto (\varphi_1(p), \varphi_2(q)) \end{aligned}$$

φ est bijective ([...])

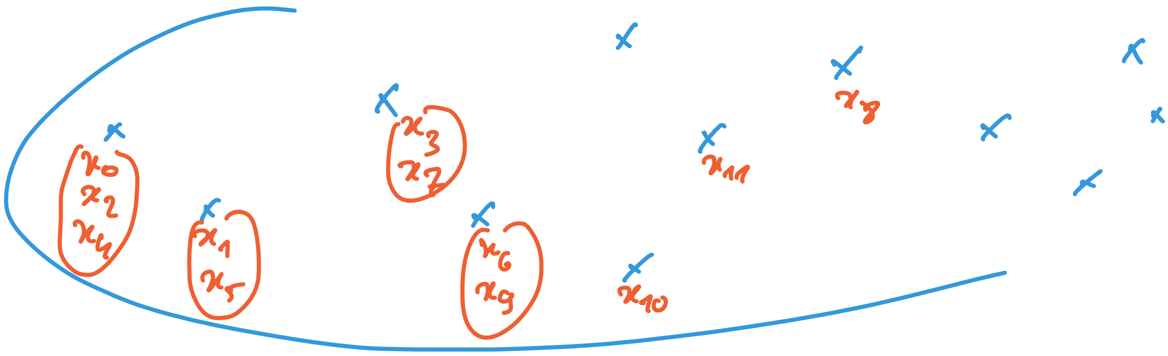
Or $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, donc en bijection avec $\mathbb{N}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\text{bijection}"'] \arrow[rr, bend right, "\text{bijection}"'] & \mathbb{N}^2 \arrow[r, "\varphi", "\text{bijection}"'] & A_1 \times A_2 \end{tikzcd}$$

Récurrence si p qcq.

Proposition. S'il existe une surjection $\mathbb{N} \to A$, alors A est au plus dénombrable.

$A =$



$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\longrightarrow A \\ n &\longmapsto x_n \end{aligned}$$ surjection, (non injective)

Définissons $\mathcal{R}$ relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$

$p \mathcal{R} q$ $\underline{\text{ssi}}$ $\varphi(p) = \varphi(q)$ ie $x_p = x_q$

c'est une relation réflexive ($p \mathcal{R} p \ \forall p$)

symétrique ($p \mathcal{R} q \Rightarrow q \mathcal{R} p$)

transitive ($\left.\begin{array}{l} p \mathcal{R} q \\ q \mathcal{R} r \end{array}\right\} \Rightarrow p \mathcal{R} r$)

On note $C = \{$classes d'équivalence de $\mathbb{N}$ pour $\mathcal{R}\}$

$= \{ \bar{n},\ n \in \mathbb{N} \}$

On pose $$\begin{aligned} \psi : C &\longrightarrow A \\ c\,\cancel{n} &\longmapsto \varphi(n) \end{aligned}$$ où $\bar{n} = c$

• ψ est bien définie. Si n_1 et n_2 tq $\overline{n_1} = \overline{n_2} = c$

on a $n_1 \mathcal{R} n_2$ donc $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$

donc $\varphi(c)$ est bien définie.

- φ <u>est injective</u>

  Si $\varphi(c_1) = \varphi(c_2)$

  on note n_1, n_2 tq $c_1 = \overline{n_1}$ et $c_2 = \overline{n_2}$

  donc $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$

  ie $n_1 \mathcal{R} n_2$

  donc $\overline{n_1} = \overline{n_2}$

  donc $c_1 = c_2$

- φ <u>est surjective</u>

  Soit $a \in A$. φ est surjective, donc $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $a = \varphi(n)$

  $= \varphi(\overline{n})$

<u>Bref</u>: $$C \xrightarrow[\text{bijective}]{\varphi} A$$

<u>Définissons</u>: $$f : C \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$c \longmapsto \operatorname{Min}\{n \in \mathbb{N} \text{ tq } \overline{n} = c\}$$

(le plus petit représentant de c)

f est bien définie, injective

($\text{si } f(c_1) = f(c_2),\ c_1 = \overline{f(c_1)} = \overline{f(c_2)} = c_2$)

Bref : $A \xrightarrow[\text{bijection}]{\varphi^{-1}} C \xrightarrow[\text{injection}]{f} \mathbb{N}$

donc il existe une injection $A \longrightarrow \mathbb{N}$

donc A est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

donc A est au plus dénombrable.

Proposition. Toute union finie ou dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

Si les $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont dénombrables

alors $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ est dénombrable.

Rmq: $x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \iff \exists i \in \mathbb{N} \quad x \in A_i$

Preuve: $\forall i \in \mathbb{N}$, A_i est dénombrable donc

$$\exists \varphi_i : \mathbb{N} \longrightarrow A_i \quad \text{bijection}$$

On pose:
$$\psi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$$
$$(p,q) \longmapsto \varphi_p(q)$$

- ψ est bien définie
- ψ est surjective :

Soit $x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Donc $\exists p \in \mathbb{N}$ tq $x \in A_p$.

Or φ_p est bijective, donc $\exists q \in \mathbb{N}$ tq $x = \varphi_p(q)$

Donc $x = \psi(p,q)$

Bref:

$$\mathbb{N} \xrightarrow[\text{bijection}]{} \mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow[\text{surjection}]{\psi} \bigcup_{i\in A} A_i$$

$$\xrightarrow[\text{surjection}]{\hspace{8em}}$$

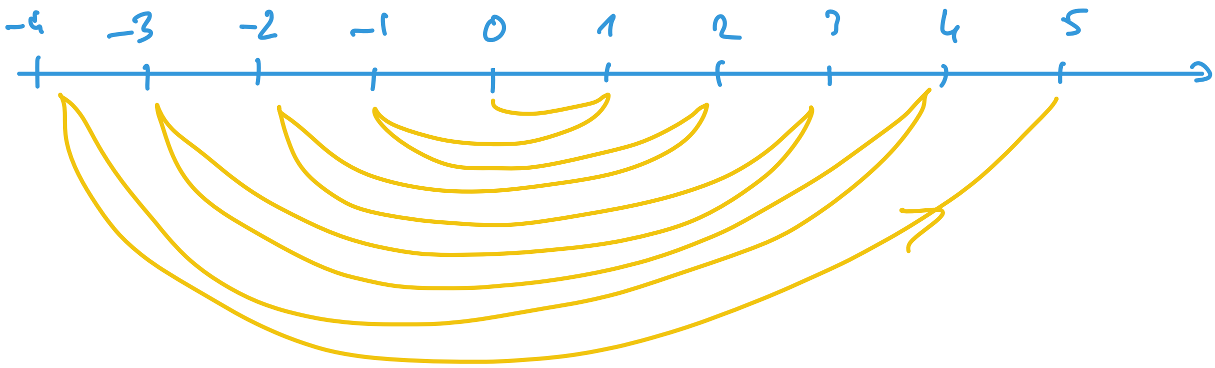
donc $\bigcup_{i\in A} A_i$ est au plus dénombrable.

2.5 D'autres exemples

produit cartésien fini d'ens au plus dénombrable est au plus dénombrable.

Exemple. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^p$ sont dénombrables

Proposition. $\mathbb{Q}$ est dénombrable.



$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^* \right\} \qquad \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$$

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (a, b) &\longmapsto \frac{a}{b} \end{aligned}$$ est surjective

et $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable

donc

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\text{bijection}} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \xrightarrow[\text{surjective}]{\varphi} \mathbb{Q}$$

$$\xrightarrow[\text{surjection}]{\qquad\qquad\qquad}$$

$\mathbb{Q}$ dénombrable

À retenir :

* au plus dénombrable : on peut énumérer les éléments

* opérations : produit cartésien fini

  union au plus dénombrable

3 Somme d'une famille de réels positifs

3.1 Définition

Définition. Soit I un ensemble quelconque (fini ou infini, voire non dénombrable) et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexée par I. On définit alors **la somme de la famille** $(u_i)_{i\in I}$ dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$ comme étant :

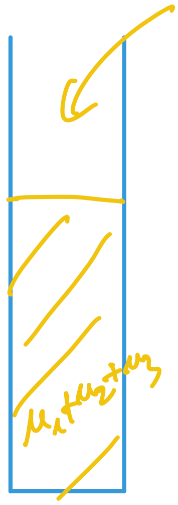
$$\sum_{i\in I} u_i = \mathrm{Sup}\{\sum_{j\in J} u_j,\ J \text{ partie finie de } I\}$$

Remarque. *On peut étendre naturellement cette définition aux familles $(u_i)_{i\in I}$ où $u_i \in [0,+\infty] = [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$.*

Proposition. Lorsque I est fini, la somme de la famille est sa somme.

$\sum_{j\in J} u_j$

$J = \{1, 2, 3\}$



Proposition. Lorsque $I = \mathbb{N}$ (et toujours $u_n \geqslant 0$ pour tout n) : limite de suite des sommes partielles.

- si la série $\sum u_n$ converge, sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, au sens des sommes de séries convergentes, est égale à la somme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, au sens des familles sommables.
- si la série $\sum u_n$ diverge, sa somme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ au sens des familles sommables vaut $+\infty$. On peut donc raisonnablement noter $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

$$\sum u_n \qquad \sum_{n=0}^{N} u_n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

les termes sont ordonnés

$u_0 + u_1 + u_2 + \dots$

l'ordre n'a pas d'importance.

3.2 Invariance par permutation

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, avec I au plus dénombrable, et σ une permutation de I, c'est-à-dire une bijection : $I \to I$. Alors, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$$

Remarque. *Ça signifie que l'ordre de sommation des familles (au plus dénombrables) de réels positifs n'intervient pas dans la valeur de la somme.*

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, avec I dénombrable. On peut **énumérer** les éléments de I en proposant une bijection : $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & I \\ k & \mapsto & i_k \end{array}$

Dans ce cas, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{i_k}$$

On considère la famille $\left(\frac{1}{q}\right)_{q\in\mathbb{Q}_+^*}$

$$\sum_{q\in\mathbb{Q}_+^*} \frac{1}{q} \in [0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$$

On numérote les éléments $\mathbb{Q}_+^*$: $\mathbb{Q}_+^* = \{x_k,\ k\in\mathbb{N}\}$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{x_k}$$

3.3 Sommation par paquets

Définition. Soit I un ensemble. On dit que $(I_j)_{j\in J}$ est une **partition de** I, ou encore un **recouvrement disjoint de** I si et seulement si :

$$\bigcup_{j\in J} I_j = I \quad \text{et} \quad j \neq j' \implies I_j \cap I_{j'} = \varnothing$$

Remarque. *En toute rigueur, on parle de* **partition** *lorsqu'aucun des* I_j *n'est vide.*

Théorème.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I.
Alors, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I_j} u_i \right)$$

Remarque. *En pratique, on dit que l'on a sommé en faisant des « paquets », les sous-familles* $(u_i)_{i\in I_j}$.

3.4 Théorème de Fubini positif

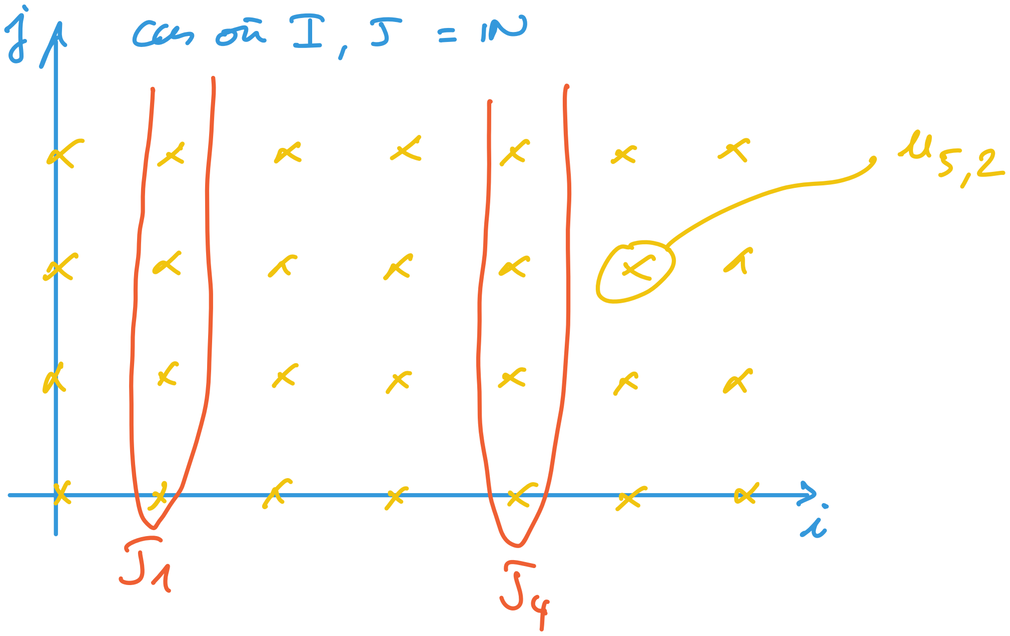
Théorème.

Soit I, J deux ensembles et $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs.
Alors, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)$$

et ces sommes valent $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j}$.

Remarque. *Il s'agit simplement de sommer par paquets, avec des paquets naturels.*



On considère les paquets $J_i = \{(i,j),\ j\in J\}$

on a $I\times J = \bigcup_{i\in I} J_i$

où les J_i sont 2 à 2 disjoints

Par paquets :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{ij} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{(i,j)\in J_i} u_{ij}\right)$$

$$= \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{ij}\right)$$

3.5 Opérations

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$, $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs, indexées par le même ensemble I.
Alors, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i$$

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$, $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs, indexées par le même ensemble I.
Si, pour tout $i \in I$, $0 \leqslant u_i \leqslant v_i$, alors, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i$$

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Soit $J \subset I$ une partie de I.
Alors, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$$

3.6 Sommabilité d'une famille de réels positifs

Définition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** si et seulement si $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.

Proposition. Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels positifs, alors le nombre d'éléments > 0 de la famille est au plus dénombrable.

Bref : si une famille est sommable, alors on peut retirer les termes nuls (inutiles) et obtenir une famille au plus dénombrable, dont on peut énumérer les éléments.

Donc la somme s'écrit $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$

$\uparrow$ indexée par des entiers.

Bref, c'est une série convergente.

Preuve : $(u_i)_{i\in I}$ famille qcq de termes ≥ 0

On suppose cette famille sommable : $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.

On note $J = \{ i\in I \text{ tq } u_i > 0 \}$

$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \underbrace{\left\{ i\in I \text{ tq } u_i \geq \frac{1}{n} \right\}}_{J_n}$$

en effet : $\boxed{\supset}$ ben oui !

$\boxed{\subset}$ ben oui !

$$\sum_{i \in J_n} \frac{1}{n} \leqslant \sum_{i \in J_n} u_i \leqslant \sum_{i \in I} u_i < +\infty$$

donc J_n est fini (nb fini d'éléments)

Bref : J est une union dénombrable d'ensembles finis,

donc J est au plus dénombrable.

4 Familles sommables de réels quelconques, ou de complexes

4.1 Définitions

Définition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes. On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** si et seulement si $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable, i.e. :

$$(u_i)_{i\in I} \text{ est sommable} \iff \sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$$

Définition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres réels. On définit sa **somme** comme :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$$

où $u_i^+ = \text{Max}(u_i, 0)$ et $u_i^- = \text{Max}(-u_i, 0)$.

Remarque. *Il s'agit d'une définition théorique, jamais utilisée en pratique. Pour le calcul effectif, on décrit les u_i en extension par une énumération, on fait des paquets etc.*

$u_i = u_i^+ - u_i^-$

$|u_i| = u_i^+ + u_i^-$

$u_i^+ \geqslant 0 \quad , \quad u_i^- \geqslant 0$

Si $(u_i)_i$ est sommable, comme $u_i^+ \leqslant |u_i|$

$u_i^- \leqslant |u_i|$

donc $(u_i^+)_i$ et $(u_i^-)_i$ sont sommables

ie $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i^+ < +\infty \qquad \sum_{i\in I} u_i^- < +\infty$.

$$\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$$

Définition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. On définit sa **somme** comme :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i) + \mathrm{i} \sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i)$$

Remarque. *Lorsque la famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est indexée par $\mathbb{N}$, elle est sommable si et seulement si la série $\sum u_i$ converge absolument. Dans ce cas, sa somme est la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou complexes, et $(v_i)_i$ une famille sommable de réels positifs. Si, pour tout $i \in I$, $|u_i| \leqslant v_i$, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

4.2 Invariance par permutation

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou de complexes, et σ une permutation de I. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ l'est. Dans ce cas :

Si $(u_i)_i$ sommable $$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$$

4.3 Sommation par paquets

Théorème.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou complexes, et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. On suppose $(u_i)_{i\in I}$ sommable. Alors :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)$$

Attention. *Pour appliquer ce théorème, Il faut d'abord justifier la sommabilité de* $(u_i)_{i\in I}$*, par exemple en montrant que* $\displaystyle\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j}|u_i|\right) < +\infty$.

4.4 Théorème de Fubini

Théorème.

Soit I, J deux ensembles et $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels ou complexes. On suppose $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ sommable. Alors :

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)$$

et ces sommes valent $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j}$.

Remarque. *Il s'agit simplement de sommer par paquets, avec des paquets naturels.*

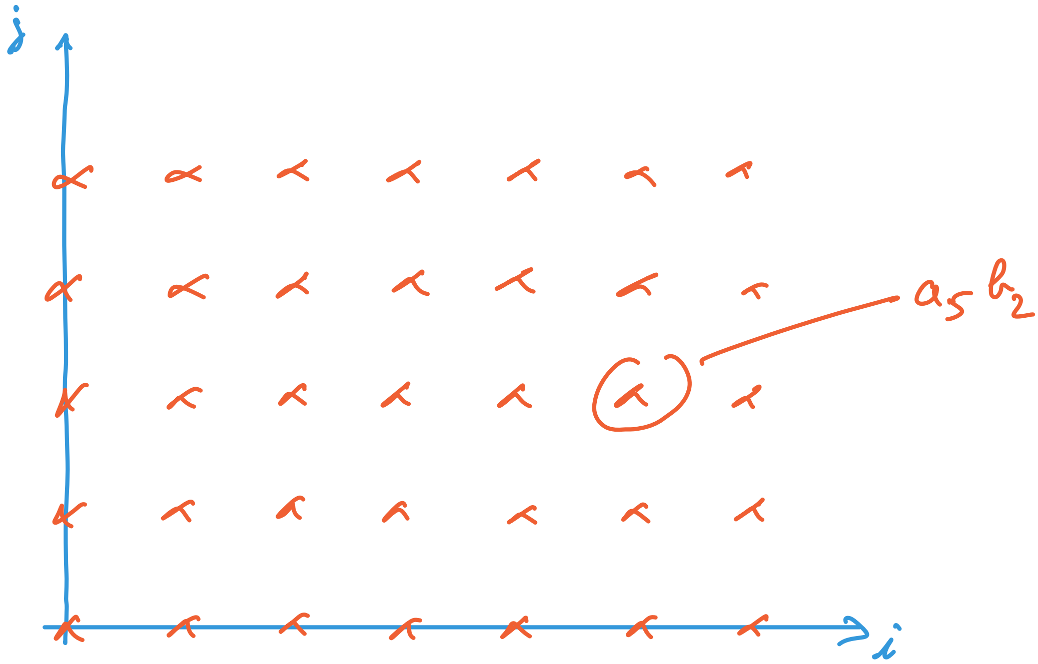
Attention. *Pour appliquer ce théorème, Il faut d'abord justifier la sommabilité de $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, par exemple en montrant que $\displaystyle\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}|u_{i,j}|\right) < +\infty$, ou l'autre.*

Proposition. Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont deux familles de réels ou complexes sommables, alors $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \Big(\sum_{i\in I} a_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} b_j\Big)$$

Ce résultat s'étend au produit d'un nombre fini de familles sommables.

Remarque. *La proposition précédente, dans le cas de familles indexées par $\mathbb{N}$, est le résultat « produit de Cauchy » de séries absolument convergentes, avec des paquets bien choisis pour la famille doublement indexée.*



$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i$ $\qquad$ $\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j$

$(a_i b_j)_{i,j}$ sommable

$$\sum_{i,j} |a_i b_j| = \sum_{i\in I} \left(\sum_{j \in J} |a_i b_j| \right)$$

Fubini positif

$$= \sum_{i \in I} \left(|a_i| \sum_{j\in J} |b_j| \right)$$

$$= \left(\sum_{i\in I} |a_i| \right) \left(\sum_{j \in J} |b_j| \right)$$

$$< +\infty$$

puis

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \dots \quad \text{Fubini}$$

$$= \left(\sum_{i\in I} a_i \right) \left(\sum_{j\in J} b_j \right)$$

Rmq : produit de Cauchy.

4.5 Opérations, espace $\ell^1(I)$

Proposition. Soit $(u_i)_{i\in I}$, $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels ou complexes, indexées par le même ensemble I. Soit λ et μ deux scalaires. On suppose que $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont sommables. Alors $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et :

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i$$

Définition. On note $\ell^1(I)$ l'espace vectoriel des familles sommables indexées par I.

Remarque. *Il s'agit, selon le contexte, du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des familles sommables de complexes indexées par I, ou alors du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des familles sommables de réels indexées par I.*