Preuve: 550.5, 550.43, 550.44

Exemple. Déterminer la somme des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} n^2 x^n \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)^2}{n} x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{n!} x^n$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{(n+2)n!} x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} (2^n + 3^n) x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$$

où $a_{n+1} = 2a_n$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)^2}{n} x^n$$

$$\sum_{n\geqslant 0}(2^n+3^n)x^n$$

Addition de 2 séries entières

$\sum 2^n x^n$ est de rayon $\frac{1}{2}$ (série géom qui cv ssi $|2x|<1$)

$\sum 3^n x^n$ ——— $\frac{1}{3}$

Ces rayons sont différents, donc $\underline{R\left(\sum (2^n+3^n)x^n\right) = \frac{1}{3}}$

$\forall x \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(2^n+3^n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^n$$

$$= \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x}$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{n!} x^n$$

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$$

où $a_{n+1} = 2a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
et $a_0 \in \mathbb{R}^*$

M1 : $a_n = 2^n a_0$ $\forall n$ par réc $\quad a_0 \sum_{n\geqslant 0} 2^n x^n$

M2 : Trouver une équation satisfaite par la somme.

- $\forall n$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2 \underset{+\infty}{\longrightarrow} 2$

  donc $R = \frac{1}{2}$

- $\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

  $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad a_{n+1} x^{n+1} = 2 a_n x^{n+1}$

  donc $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n x^{n+1}$

  (séries CV car $|x| < \frac{1}{2}$)

  ie $\quad S(x) - a_0 = 2x\, S(x)$

  donc $\quad S(x) = \frac{a_0}{1-2x}$

5 Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

5.1 Série géométrique

Proposition. La série entière $\sum z^n$, appelée **série géométrique** de raison z, a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $|z| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

5.2 Série exponentielle

Définition. La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$, appelée **série exponentielle** a pour rayon de convergence $+\infty$. On appelle **exponentielle** sa somme, de sorte que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

Proposition. Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

(produit de Cauchy)

Proposition. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Remarque. *On peut définir, par exemple :*

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ et } \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

qui prolongent à $\mathbb{C}$ le développement en série entière réel connu. On remarque qu'alors :

$$\sin(iz) = i\,\operatorname{sh}(z)$$

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$\operatorname{ch}(a+b) = \cdot\ -.$

Exercice:

DSE(0) de Arccos.

$\forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$(1+u)^\alpha$

$R = 1$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \left(-x^2\right)^n$$

où
$$b_n = \frac{\overbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}^{n \text{ termes}}}{n!}$$

$$\frac{-2n+1}{2}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}\,\underbrace{1\times 3\times 5 \cdots (2n-1)}_{n \text{ termes}}\,\frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{(2n)!}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\,\frac{1}{2^n}$$

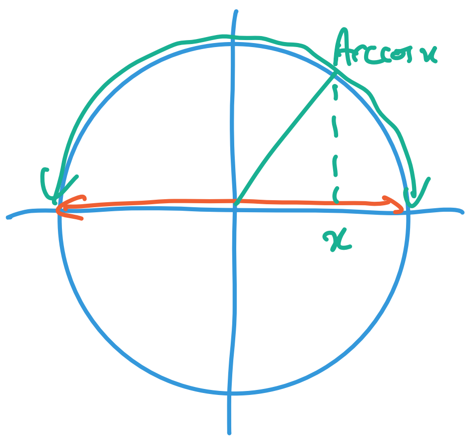
$$= \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{(2n)!}{2^n .\ n!}\,\frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{(-1)^n\,(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}$$

Donc $\forall x \in]-1,1[$
$$\operatorname{Arccos}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\, x^{2n}$$

par primitivation :

$\forall x \in]-1,1[$
$$\operatorname{Arccos}(x) = \underbrace{\operatorname{Arccos}(0)}_{= \frac{\pi}{2}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$



$\boxed{550.25}$