Pour je 550.1, 550.2, 550.3, 550.4

Craie EDT

Prise en compte de la présentation des copies

Plusieurs possibilités pouvaient être envisagées afin de prendre en compte la présentation dans la note finale :

- prévoir dans le barème des points dédiés à la présentation ;
- valoriser par un bonus les copies très bien présentées ;
- pénaliser les copies mal présentées par un malus.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

La première possibilité déconnecte le fond de la forme et pourrait conduire certains candidats à obtenir des points de présentation pour une copie scientifiquement vide. Elle n'a donc pas été retenue. L'utilisation d'un bonus sous-entend qu'une copie mal présentée est acceptable. Or le concours souhaite qu'une présentation correcte soit la norme. Nous avons donc retenu l'utilisation d'un malus, limité à 10 % de la note de fond, appliqué en s'appuyant sur les critères et indicateurs suivants :

Critères	**Indicateurs**
Lisibilité de l'écriture	L'écriture ne ralentit pas la lecture.
Respect de la langue	La copie ne comporte pas de fautes d'orthographe ni de grammaire.
Clarté de l'expression	La pensée du candidat est compréhensible à la première lecture.
Propreté de la copie	La copie ne comporte que peu de ratures, réalisées avec soin et les parties qui ne doivent pas être prises en compte par le correcteur sont clairement et proprement barrées.
Identification des questions	Les différentes parties du sujet sont bien identifiées et les réponses sont numérotées avec le numéro de la question.
Mise en évidence des résultats	Les résultats littéraux et numériques sont clairement mis en évidence.

La copie est évaluée au fond en faisant abstraction, dans la mesure du possible, de sa présentation. Si, arrivé à la fin de la copie, le correcteur estime qu'il a passé plus de temps que nécessaire à l'évaluer ou s'il pense que la présentation de la copie laisse à désirer, il prend quelques instants afin d'objectiver sa perception à l'aide des critères listés précédemment. Pour cela, il évalue chacun des critères comme atteint ou non. Il est évident qu'une faute d'orthographe isolée ou la présence d'une rature ponctuelle ne sont pas à pénaliser et n'empêchent donc pas d'atteindre le critère correspondant. Une copie qui n'atteint pas tous les critères et ne respecte donc pas les normes de présentation attendues sera sanctionnée par un malus décliné en trois paliers. Pour cela, le correcteur compte le nombre de critères qui ne sont pas atteints et attribue le malus éventuel tel que précisé dans le tableau suivant.

Nombre de critères non atteints	**Palier du malus**	**Effet sur la note**
0	0	aucun
1 ou 2	1	−3,3 %
3 ou 4	2	−6,7 %
5 ou 6	3	−10 %

$\sum a_n x^n$ $\qquad R$

$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad x \in]-R, R[$

opérations CL, produit, primitiver, dériver ou $]-R, R]$

th radial d'Abel ou $[-R, R[$

ou $[-R, R]$

$f(x) = \text{Arctan}\, x$

$D_f =]-\infty, +\infty[\qquad$ est-ce que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$?

4 Développement en série entière en 0 d'une fonction d'une variable réelle

4.1 Développement en série entière d'une fonction

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0.
On dit que f **est développable en série entière sur** $]-r, r[$ ou **admet un développement en série entière** si et seulement si $]-r, r[\subset I$ et il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que :

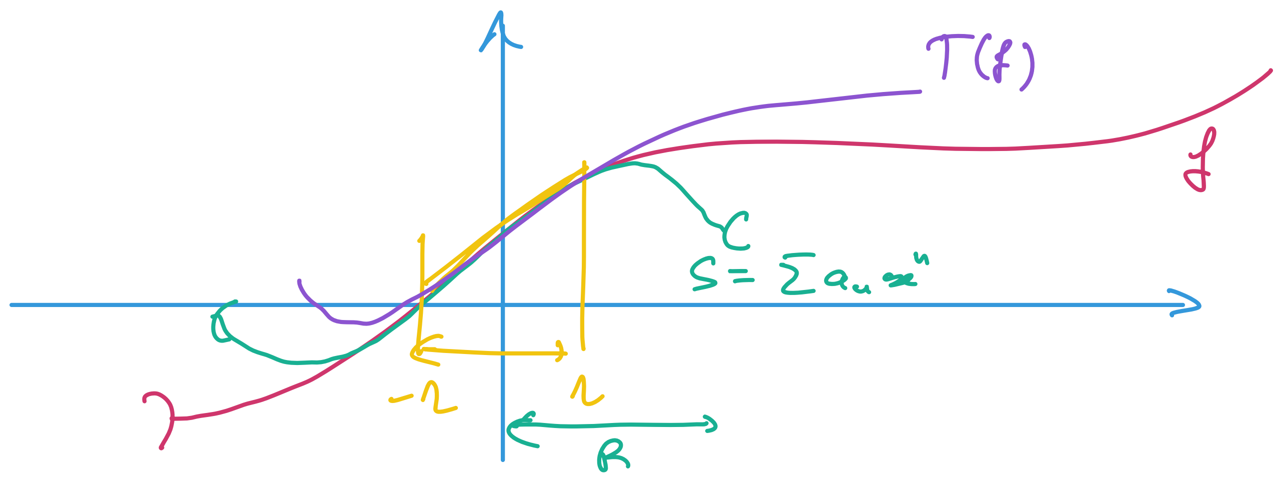
$$\forall x \in]-r, r[, \; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque. *Souvent, on ne précise pas la valeur de $r > 0$, on dit simplement que f est développable en série entière* ***au voisinage de*** *0 ou* ***en*** *0.*

Remarque. *La fonction f peut être définie sur un intervalle plus grand que $]-R, R[$ ou $[-R, R]$.*
En revanche, si f n'est pas continue en $x_0 \neq 0$, alors $R \leqslant |x_0|$.

discute $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$D_f \neq D_S \neq]-r, r[$



Prop. Si f admet un D.S.E, il est unique

Preuve Soit f définie sur D_f.

On suppose $\exists (a_n)_n, (b_n)_n$. $\exists r_a, r_b > 0$ tq

$$\forall x \in]-r_a, r_a[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\forall x \in]-r_b, r_b[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

On note $r = \min(r_a, r_b) > 0$

$$\forall x \in]-r, r[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Donc par unicité $\underline{\forall n \ a_n = b_n}$.

Proposition. Soit f une fonction qui admet un développement en série entière $\sum a_n x^n$ au voisinage de 0.

- Si f est paire, son développement en série entière est pair : $\forall p,\ a_{2p+1} = 0$.
- Si f est impaire, son développement en série entière est impair : $\forall p,\ a_{2p} = 0$.

On suppose f admet un D.S.E. $\exists (a_n)_n$ $r>0$

tq $\forall x \in]-r, r[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

<u>Si f est paire</u> : $\forall x \in]-r, r[$

$$\begin{array}{ccc} f(-x) & = & f(x) \\ \| & & \| \\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-1)^n x^n & & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$$

Par unicité des coeff d'un dév. en série entière

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n (-1)^n = a_n$

i.e. $\forall p \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} a_{2p} = a_{2p} \\ a_{2p+1}(-1) = a_{2p+1} \end{cases}$

i.e. $a_{2p+1} = 0$

Ainsi:

$\forall x \in]-1, 1[$

$f(x) = a_0 + 0 \cdot x + a_2 x^2 + 0 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$

4.2 Série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0. On suppose f de classe $\mathcal{C}^\infty$. On appelle **série de Taylor de** f la série entière :

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

R rayon de cv $\forall x \in]-R, R[, \ T(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

somme de la série entière

$\sum a_n x^n$ $\quad R_a \quad$ $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ $\quad \forall x \in]-R_a, R_a[$

S $\mathcal{C}^\infty$ $\quad a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$ $\quad T(S)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

CN

Proposition. Si f admet un développement en série entière sur $]-r, r[$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et elle coïncide sur $]-r, r[$ avec la somme de sa série de Taylor :

$$\forall x \in]-r, r[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Preuve: bien sûr !

Attention : Ce th ne dit pas que f admet un D.S.E.

Preuve: Si f admet un DSE

$\exists (a_n)_n \quad \exists r>0$ tq

$\forall x \in]-r, r[\quad f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}_{\text{noté } S(x)}$

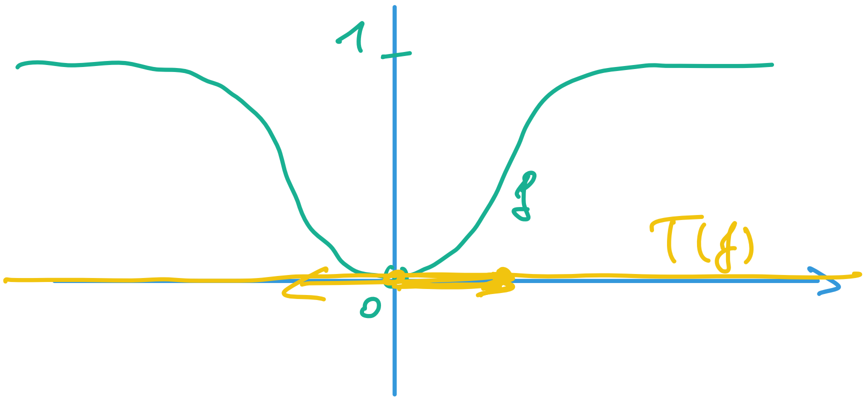
On a vu §3 : S est $\mathcal{C}^\infty$ et $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$

Donc f est $\mathcal{C}^\infty$ au vois de 0 et $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Remarque. *Attention ! Une fonction peut être $\mathcal{C}^\infty$ sans admettre de développement en série entière.*

Attention ! Une fonction peut admettre une série de Taylor convergente, sans pour autant coïncider avec la somme de cette série.

Exemple. La fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \end{array}$ prolongée par continuité en 0 admet-elle un développement en série entière au voisinage de 0 ?



$f(0) = 0$

f est $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall k$ $f^{(k)}(0) = 0$

$$T(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} 0 . x^n$$

Série entière de rayon $R = +\infty$

et pourtant : $\forall x \neq 0$, $T(f)(x) \neq f(x)$

Si f admet un DSE, c'est $T(f)$: $\exists r > 0$ tq $\forall x \in]-r, r[$ $f(x) = T(f)(x)$

Or $\forall x \neq 0$, $T(f)(x) \neq f(x)$

Donc f n'est pas développable en série entière.

(pourtant, f est $\mathcal{C}^\infty$) "C'est chaud"

4.3 Pour montrer qu'une fonction admet un développement en série entière en 0

4.3.1 Opérations sur les fonctions développables en séries entières

Proposition.

- Si f et g admettent des DSE qui sont respectivement $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, alors $\lambda f + \mu g$ admet un DSE qui est :
$$\sum (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$$
Le rayon de convergence a été précisé précédemment.
- Si f et g admettent des DSE qui sont respectivement $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, alors fg admet un DSE qui est le produit de Cauchy des DSE de f et g :
$$\left(\sum a_n x^n\right)\left(\sum b_n x^n\right) \qquad \sum c_n x^n \quad \text{où} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$
Le rayon de convergence a été précisé précédemment.
- Si f admet un DSE qui est $\sum a_n x^n$, alors f est dérivable, f' admet un DSE qui est :
$$\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$$
Les rayons de convergences sont égaux.
- Si f admet un DSE qui est $\sum a_n x^n$, alors les primitives de f admettent un DSE qui sont :
$$K + \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$
Les rayons de convergences sont égaux.

Exemple : ch est-elle développable en SE ?

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x}$

or e^x et e^{-x} sont développable en série entière :

$\forall x \in]-\infty, +\infty[\quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$

$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n x^n$

Donc par C.L. $\forall x \in]-\infty, +\infty[$

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2n!} + \frac{(-1)^n}{2n!}\right)}_{a_n} x^n$$

$$a_{2p} = \frac{1}{(2p)!} \qquad a_{2p+1} = 0$$

Bref : $\boxed{\forall x \in]-\infty, +\infty[\quad \operatorname{ch}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}}$ $R = +\infty$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

De même : $\boxed{\operatorname{sh} x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \qquad R = +\infty}$

Exemple : Mq $\frac{1}{(1-x)^2}$ admet un DSE.

$\frac{1}{1-x}$ admet un DSE : $\forall x \in]-1, 1[\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

Donc, par produit, $\frac{1}{(1-x)^2}$ admet un DSE

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

$$\text{où } c_n = \sum_{k=0}^{n} 1.1 = n+1$$

$$\text{ie} \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$$

Exemple : Mq $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ admet un D.S.E.

$\dfrac{1}{1-x}$ admet un DSE de rayon 1 :

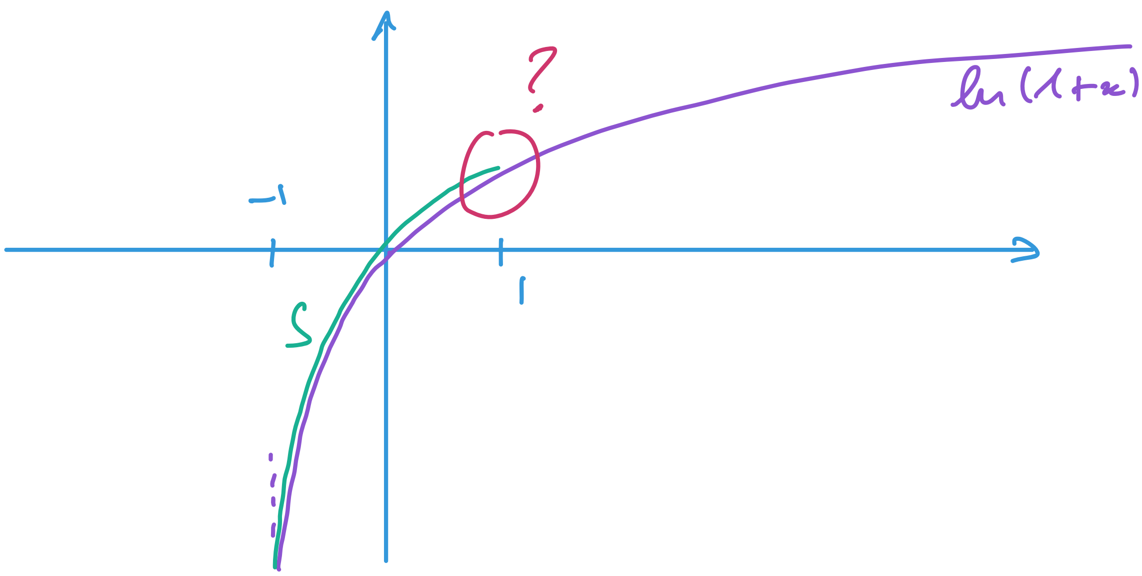
$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

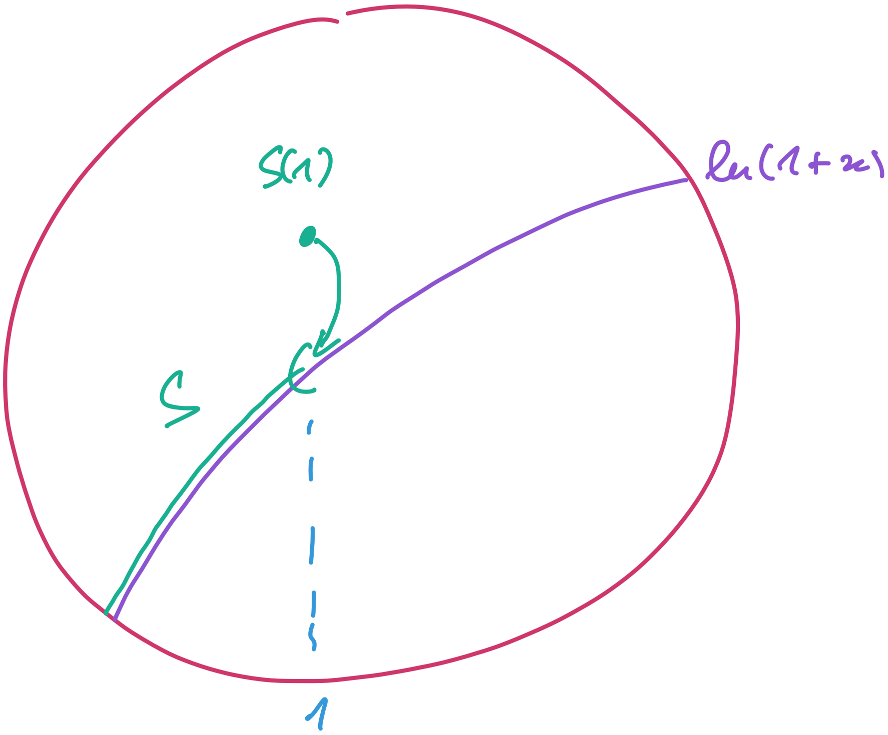
Donc, par dérivation

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

Exemple : $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ $R=1$

$$\forall x \in]-1,1[\quad \boxed{\underbrace{\ln(1+x)}_{f(x)} = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}}_{S(x)} \qquad R=1}$$





$\sum (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ en 1 est une série convergente

(harmonique alternée)

Donc $S(1)$ existe

Par le th radial d'Abel, S est donc continue en 1

or $\ln(1+x)$ aussi, donc

$$\forall x \in]-1, 1] \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

4.3.2 Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral

Rappel : formule de Taylor avec reste intégral. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant 0, alors pour $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{R_n(x)}$$

Proposition. Avec les notations précédentes, pour f de classe $\mathcal{C}^\infty$, f admet un DSE(0) si et seulement si $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ sur un voisinage (non vide) de 0.

Remarque. *C'est un résultat plutôt théorique. Même si on l'utilise dans l'exemple suivant, l'utilisation du formulaire du § 4.3.4 est plus efficace, comme c'est le cas dans la recherche de développements limités.*

Exemple. Montrer que la fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(déjà vu)

$x > 0$

$$|R_n(x)| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt$$

$$\leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^x \, dt$$

$$= e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

4.3.3 Utilisation d'une équation différentielle

Exemple. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, et que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$R=1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$

Remarque. *Lorsque α est un entier naturel, la fonction est un polynôme et sont développement en série entière est obtenu par la formule du binôme, et est valable sur $\mathbb{R}$.*

Remarque : $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3} x^3 + \dots$

$\frac{\alpha}{1} \quad \frac{(\alpha-1)}{2} \quad \frac{(\alpha-2)}{3}$

Preuve. On note $f(x) = (1+x)^\alpha \quad \forall x \in]-1,1[\quad \alpha \neq 0$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

Donc f est solution sur $]-1,1[$ de l'éq. différentielle

$$(1+x)y' - \alpha y = 0 \qquad (E)$$

Y a-t-il des solutions développables en série entière ?

Analyse Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ on suppose $R>0$

$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \forall x \in]-R,R[$

$r = \min(1,R) > 0$

S sol de (E) sur $]-r,r[$ $\iff \forall x \in]-r,r[\; (1+x)S'(x) - \alpha S(x) = 0$

$\iff \forall x \quad (1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

$\iff \forall x \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n x^n = 0$

$\sum b_n x^n$

glissement d'indice dans la 1re somme

$$\iff \forall x \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=\cancel{1}\,0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n x^n = 0$$

$$\iff \forall x \in]-1,1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+1)a_{n+1} - (\alpha-n)a_n\right] x^n = 0$$

$$\iff \forall n \quad (n+1)a_{n+1} - (\alpha-n)a_n = 0$$

par unicité des coeff d'un développement en série entière.

$$\iff \forall n \quad a_{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1}a_n$$

Synthèse Notons $(a_n)_n$ tq $\forall n \quad a_{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1}a_n$

et $a_0 = 1$

On a :

$$a_n = \frac{(\alpha-n+1)}{n}\cdot\frac{(\alpha-n+2)}{n-1}\cdot \dots \frac{(\alpha-1)}{2}\cdot\frac{\alpha}{1}a_0$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad \text{par réc}$$

On s'intéresse à $\sum a_n x^n$ série entière.

Rayon de convergence ?

* si $\alpha \notin \mathbb{N}$, $a_n \neq 0 \; \forall n$ $\quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$

donc $R=1$

* si $\alpha \in \mathbb{N}$, a_n nul à partir d'un certain rang,

donc $R = +\infty$

Bref : $R \geq 1$

Donc : $\forall x \in]-1, 1[$

$$(1+x) S'(x) - \alpha S(x) = 0$$

(d'après les équivalences de l'analyse)

c'est a_0.

Ouf ! $S(x)$ est sol de (E) et $S(0) = 1$

$(1+x)^\alpha$ est sol de (E) et $(1+0)^\alpha = 1$

Donc : $\forall x \in]-1, 1[\quad (1+x)^\alpha = S(x)$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 X^0 + a_1 X^1 + \dots + a_n X^n$$

$X^0 = 1$

$$P(0) = a_0$$

4.3.4 Formulaire

Les développements issus de l'exponentielle (Rayon $+\infty$).

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{pour tout } x \in]-\infty, +\infty[$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Les développements issus de la série géométrique, de $(1+x)^\alpha$ (Rayon 1).

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \text{pour tout } x \in]-1, 1[$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

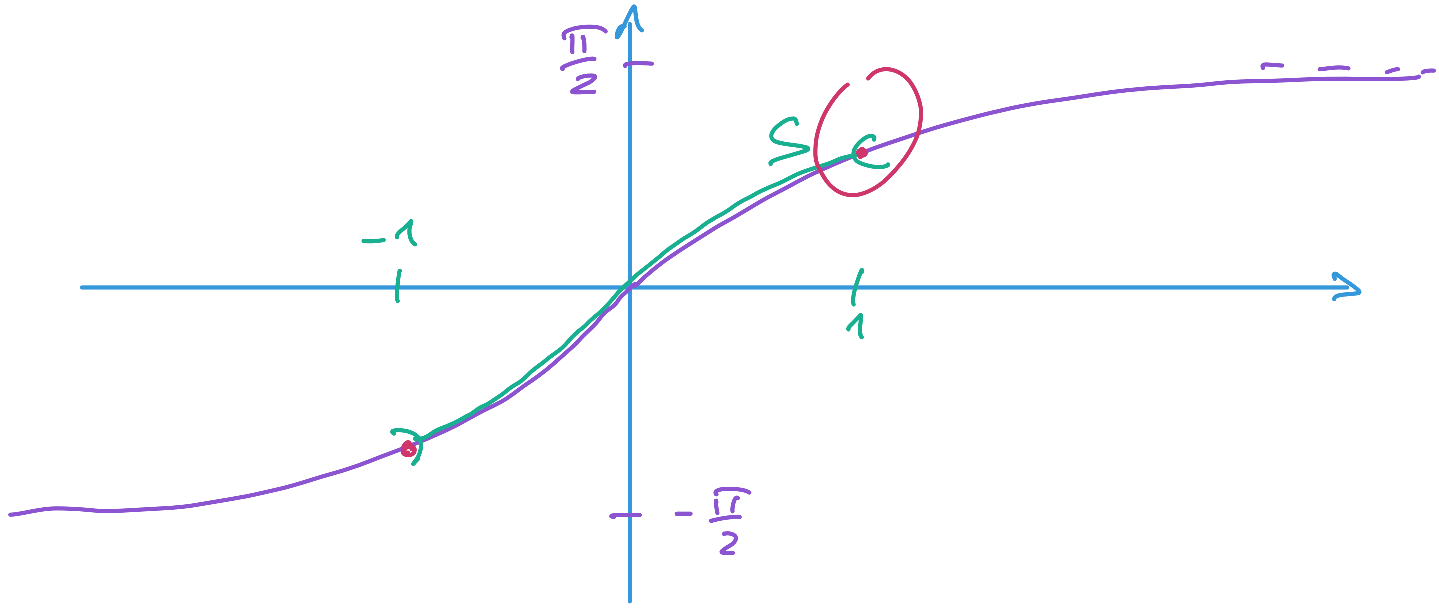
Remarque. *Notons que la fonction* Arctan *est définie sur* $\mathbb{R}$, *mais son développement en série entière sur* $]-1,1[$ *(ou peut-être* $[-1,1]$, *mais pas plus).*

$\forall x \in]-1, 1[$
$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Donc, par primitivation

$\forall x \in]-1, 1[$
$$\operatorname{Arctan} x = 0 + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}_{S(x)}$$

Arctan 0.



π/2
-1
1
- π/2

4.4 Calcul de la somme d'une série entière

Pistes.

- Connaître le formulaire du § 4.3.4 !
- Reconnaître des combinaisons linéaires (parfois aux premiers termes près) de SE du formulaire.
- Reconnaître des dérivées de SE connues. En particulier, pour $|x| < 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\
\frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n \\
\frac{2}{(1-x)^3} &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) x^n
\end{aligned}$$

- Ne pas hésiter à factoriser par x, x^2 ou alors $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$ pour ajuster le degré de x.
- On peut dériver $S(x)$ en $S'(x)$, $S''(x)$ et faire apparaître une SE connue ou une équation différentielle satisfaite par $S(x)$.
- Si on connaît une relation de récurrence satisfaite par les a_n, on multiplie par x^n et on somme ces relations, pour obtenir une équation fonctionnelle satisfaite par $S(x)$.

Exemple. Déterminer la somme des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} n^2 x^n \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)^2}{n} x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{n!} x^n$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{(n+2)n!} x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} (2^n+3^n) x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$$

où $a_{n+1} = 2a_n$

$$\sum_{n\geqslant 0} n^2 x^n \qquad R = 1$$

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n(n-1)+n\right) x^n$$

$$= \sum_{n=\cancel{0}\,2}^{+\infty} n(n-1) x^n + \sum_{n=\cancel{0}\,1}^{+\infty} n x^n$$

(2 séries de rayon 1)

$$= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

On connait
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad (1-x)^{-1}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \qquad --(1-x)^{-2}$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} \qquad --2(1-x)^{-3}$$

Donc
$$S(x) = x^2 \cdot \frac{2}{(1-x)^3} + x \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{(n+2)n!} x^n \qquad R = +\infty \qquad \left| \frac{(n+1)}{(n+2)} \cdot \frac{x^n}{n!} \right| \sim \frac{|x|^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)\ n!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1) - (n+2) + 1}{(n+2)!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$$

(3 séries de rayon ∞)

$$T(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right) \frac{1}{x}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $$T(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{x} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(e^x - 1 \right)$$

Pour $x = 0$ $$T(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$ évalué en 0

$$= 1$$

CCl : $$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(e^x - 1) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\forall x \neq 0 \qquad S(x) = \sum_{n \geq 0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n \geq 0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} + \sum_{n \geq 0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$$

$$= e^x - \frac{1}{x}\left(e^x - 1\right) + \frac{1}{x^2} \sum_{n \geq 0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

$$= \underbrace{e^x - \frac{1}{x}\left(e^x - 1\right) + \frac{1}{x^2}\left(e^x - 1 - x\right)}_{\substack{\text{se prolonge en } 0 \\ \text{en une fct } \mathcal{C}^\infty\,! \\ \text{c'est } S(0)}}$$