Pour me 550.10, 550.19, 660.12 $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad a_n \in \mathbb{R} \qquad \left(\sum a_n z^n \right)$

$R = \operatorname{Sup} \{ \rho > 0$ tq $(a_n \rho^n)_n$ bornée $\}$

$]-R, R[$ int ouvert de cv. $\qquad R$? $\; -R$?

2 Opérations sur les séries entières

2.1 Loi externe

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Pour $\lambda \neq 0$, $\sum \lambda a_n z^n$ a pour rayon de convergence R et, pour tout z tel que $|z| < R$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Preuve: $\lambda \neq 0$ fixé

$\{ \rho > 0$ tq $(\lambda a_n \rho^n)_n$ bornée $\}$

$= \{ \rho > 0$ tq $(a_n \rho^n)_n$ bornée $\}$

donc $R = R'$

À z fixé dans $D(0, R)$ $\qquad \sum a_n z^n$ cv

et $\sum \lambda a_n z^n$ cv

et $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n z^n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Addition

$R_{a+b} \geqslant \text{Min}(R_a, R_b)$

2.2 Somme de deux séries entières

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.

- Si $R_a < R_b$ alors $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = R_a < R_b$
- Si $R_a = R_b$ alors le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geqslant R_a = R_b$

Dans tous les cas, pour $|z| < \text{Min}(R_a, R_b)$:

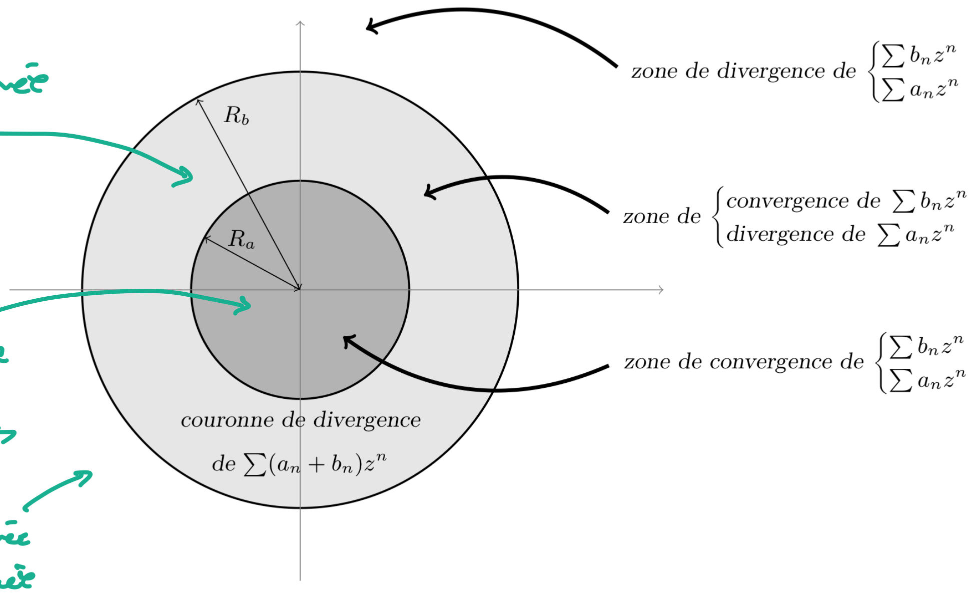
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Interprétation graphique lorsque $R_a < R_b$.

$(a_n z^n)$ non bornée
$(b_n z^n)$ bornée

$(a_n z^n)_n$ bornée
$(b_n z^n)_n$ bornée

$(a_n z^n)$ non bornée
$(b_n z^n)$ non bornée



Exemple. Donner un exemple de deux séries entières pour lesquelles $R > R_a = R_b$

Preuves

- Cas où $R_a < R_b$

  * Si $0 < \rho < R_a$

    $(a_n \rho^n)_n$ bornée et $(b_n \rho^n)_n$ bornée

    donc $((a_n + b_n)\rho^n)_n$ bornée

    donc $\rho \leq R_{a+b}$

    vrai $\forall \rho < R_a$ donc $R_a \leq R_{a+b}$

* Si $R_a < \rho < R_b$

$(a_n \rho^n)_n$ non bornée et $(b_n \rho^n)_n$ bornée

donc $((a_n+b_n)\rho^n)_n$ non bornée

donc $R_{a+b} \leq \rho$

Vrai $\forall \rho > R_a$ donc $R_{a+b} \leq R_a$

* Pour $z \in D(0, R_a)$ fixé

Les 3 séries numériques convergent et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n+b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n .$$

- Si $R_a = R_b$

Comme précédemment $R_{a+b} \geq R_a = R_b$

On ne peut rien dire de plus en général.

Exemple:

$a_n = 1 \quad \forall n$ et $b_n = -1 + \frac{1}{2^n}$

$\sum 1 . x^n$ $\qquad$ $\sum \left(-1 + \frac{1}{2^n}\right) x^n$

$R_a = 1$ $\qquad$ $|b_n| \sim 1$ donc $R_b = 1$

$c_n = a_n + b_n = \frac{1}{2^n}$ $\qquad$ $\sum \left(\frac{x}{2}\right)^n$

cv ssi $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$

donc $R_c = 2 > R_a = R_b$

2.3 Produit de Cauchy

Définition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On définit leur **produit de Cauchy** comme étant la série entière $\sum c_n z^n$ où :

$$\forall n,\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Remarque. *Cela correspond, à z fixé, au produit de Cauchy des séries numériques.*

Proposition. Soit R_a et R_b les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, et R_c le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$ leur produit de Cauchy. Alors :

$$R_c \geqslant \text{Min}(R_a, R_b)$$

et pour tout $|z| < \text{Min}(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Exemple. Effectuer le produit de Cauchy de $\sum z^n$ avec elle-même.

à z fixé, le produit de Cauchy des séries numériques

$\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$

est $\sum d_n$ où $d_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k z^k)(b_{n-k} z^{n-k})$

$= \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)}_{c_n} z^n$

Preuve: Si $|z| < \text{Min}(R_a, R_b)$,

$\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ cv absolument

donc, par produit de Cauchy

$\sum d_n$ cv absolument

ie $\sum c_n z^n$ cv absolument

donc $|z| \leq R_c$

Vrai $\forall |z| < \mathrm{Min}(R_a, R_b)$

donc $\mathrm{Min}(R_a, R_b) \leq R_c$

Et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} d_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$

$$\begin{array}{c} \| \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \end{array}$$

Remarque: Si une série entière est lacunaire, on s'il "manque" les 1er termes, toujours définir $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et appliquer la formule.

$a_n = 1$ $\quad$ $b_n = 1$

Produit de Cauchy de $\sum z^n$ avec $\sum z^n$

- Par déf, le produit de Cauchy de $\sum z^n$ avec elle même est $\sum c_n z^n$ où

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} 1.1.$$
$$= (n+1)$$

• Par le théorème sur le produit de Cauchy :

$$R_c \geqslant \min(1, 1)$$

(Aucun intérêt ici : $c_n \underset{+\infty}{\sim} n$

donc $R(\sum c_n z^n) = R(\sum n z^n)$

$= 1$)

et $\forall z$ tq $|z| < \min(1,1)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2$$

ie $$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n = \left(\frac{1}{1-z}\right)^2$$

Remarque : $\forall x \in]-1, 1[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\parallel$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

?! $$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} \qquad - \frac{-1}{(1-x)^2}$$

3 Régularité de la somme

3.1 Mode de convergence des séries entières réelles

On s'intéresse à une série entière de variable réelle $\sum a_n x^n$ et on note R son rayon de convergence.

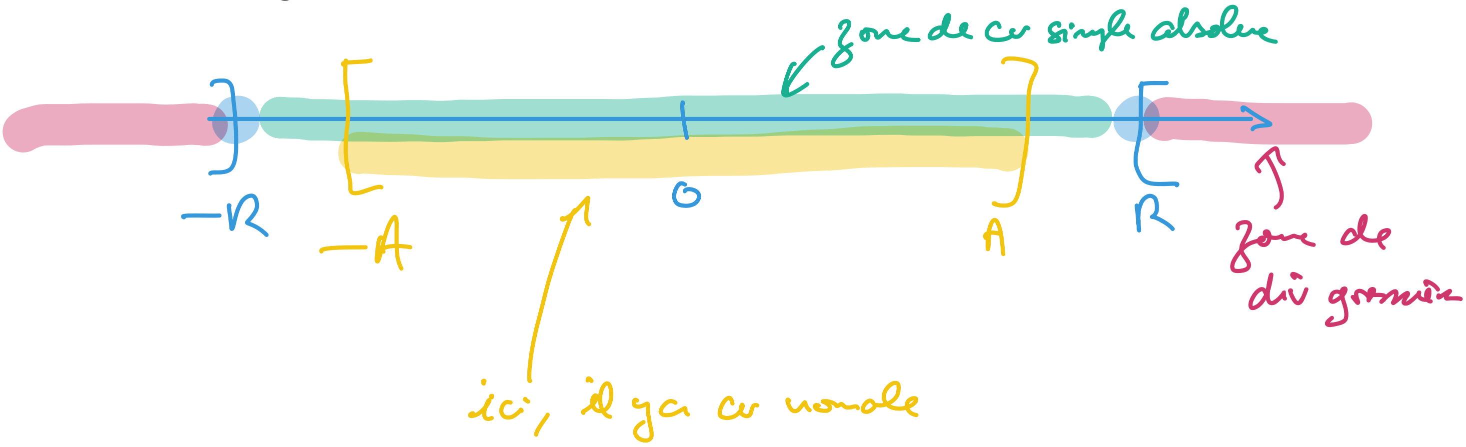
Remarque. *On a déjà dit la convergence simple sur l'intervalle ouvert de convergence* $]-R, R[$.

Théorème.

$$\boxed{\sum a_n x^n \text{ converge normalement sur tout segment } [-A, A] \subset]-R, R[.}$$

On dispose plus généralement du résultat suivant :

Proposition. $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence.



Soit $[-A, A] \subset]-R, R[$

$\forall x \in [-A, A]$

$$|a_n x^n| \leq |a_n| A^n$$

indep de x

t.g d'une série cv

car $A \in]-R, R[$

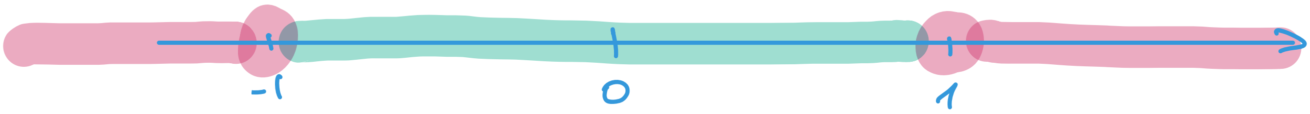
donc $\|a_n x^n\|_\infty^{[-A,A]} \leq |a_n| A^n$

donc $\sum a_n x^n$ cv normalement sur $[-A, A]$

Exemple. Déterminer les domaines de convergence simple, uniforme, normale pour :

$$\sum x^n, \sum \frac{x^n}{n}, \sum \frac{x^n}{n^2}$$

- $\sum x^n$. On connaît $R(\sum x^n) = 1$



en 1 et -1, $\sum x^n$ div grossièrement.

donc $D_{cv\ simple} =]-1, 1[$

<u>cv normale:</u> $\forall [-A, A] \subset]-1, 1[$,

$\sum x^n$ cv normalement sur $[-A, A]$.

$$\|x^n\|_\infty^{]-1,1[} = 1$$

pas cv normale sur $]-1, 1[$

<u>cv uniforme:</u> sur $[-A, A] \subset]-1, 1[$, oui par cv normale

sur $[0, 1[$?

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty$$

S'il y avait cv uniforme sur $[0, 1[$, comme

$x^n \xrightarrow[x \to 1^-]{} 1$, on aurait cv de $\sum_{n=0}^{+\infty} 1$

Contradiction donc pas cv unif sur $[0,1[$

sur $]-1,0]$?

S'il y avait cv uniforme sur $]-1,0]$, avec

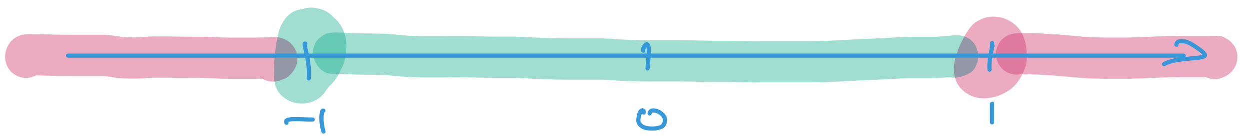
$$x^n \xrightarrow[x \to -1,\ >]{} (-1)^n,$$ on aurait cv de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$

$$\cancel{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in]-1,0]}$$

~~donc, à la limite pour~~ $\cancel{x \xrightarrow[>]{} -1}$

$$\cancel{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}}$$

- $\sum \frac{x^n}{n}$ $\qquad R\left(\sum \frac{1}{n} x^n\right) = R\left(\sum x^n\right) = 1$



en $x = 1$ $\quad \sum \frac{1}{n}$ diverge

en $x = -1$ $\quad \sum \frac{(-1)^n}{n}$ cv

$D_{cv\,simple} = [-1, 1[$

Cv uniforme sur tout $[-A, A] \subset]-1, 1[$

pas sur $]-1,1[$ car $\left\| \frac{x^n}{n} \right\|_\infty = \frac{1}{n}$

Convergence uniforme ?

* sur $[0,1[$. S'il y avait cv uniforme, comme $\frac{x^n}{n} \xrightarrow[x \to 1^<]{} \frac{1}{n}$, on aurait cv de $\sum \frac{1}{n}$.

* sur $[-1,0[$

$$\frac{x^n}{n} = (-1)^n \frac{|x|^n}{n}$$

avec $\left(\frac{|x|^n}{n}\right)_n$ est positive, décroissante, de limite nulle.

Donc par le th des séries alternées

$$\left(\sum \frac{x^n}{n} \text{ converge}\right)$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \quad \text{indép de } x$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc la cv est uniforme.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = S(x) \qquad \forall x \in]-1,1[$$

↳ vaut $-\ln(1-x)$

Pour $x \geq -1$. Par cv uniforme, double limite

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2} \quad \text{car } \ln(1-x) \text{ continue.}$$

• $\sum \frac{x^n}{n^2}$ $\quad R=1$

$\forall x \in [-1,1] \quad \left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ indep de x

tq série convergente

donc $\sum \frac{x^n}{n^2}$ cv normalement sur $[-1,1]$.

On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$

définie sur $[-1,1]$

continue sur $]-1,1[$ somme de série entière de rayon 1.

$\sum \frac{x^n}{n^2}$ cv normalement, donc uniformément sur $[-1,1]$.

$x \mapsto \frac{x^n}{n^2}$ continues sur $[-1,1]$.

Donc, par transfert de continuité, S est continue sur $[-1,1]$.

3.2 Continuité de la somme des séries entières

Théorème.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Sa somme $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

On dispose plus généralement du résultat suivant :

Proposition. Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de variable complexe, de rayon de convergence R, alors sa somme est continue sur le disque ouvert de convergence.

Preuve. Résultat admis. □

Preuve : $\forall [-A, A] \subset]-R, R[$

$\sum a_n x^n$ cv normalement donc unif sur $[-A, A]$

$x \mapsto a_n x^n$ continue sur $[-A, A]$

Donc par transfert de continuité,

$S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur tout

$[-A, A] \subset]-R, R[$ donc sur $]-R, R[$.

Remarque : Pas de continuité sur $]-R, R]$ a priori même si cv simple sur $]-R, R]$.

Remarque : En fait, si.

Thm radial d'Abel.

3.3 Résultat au bord de l'intervalle de convergence pour la somme des séries entières réelles

Remarque. *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

- *Si $R = +\infty$, on sait déjà que sa somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.*
- *Si $R < +\infty$ et si $\sum |a_n| R^n$ converge, alors sa somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle $[-R, R]$.*

donc $\sum a_n x^n$ cv normalement sur $[-R, R]$

Théorème d'Abel radial.

> Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$.
> Si la série numérique $\sum a_n R^n$ converge, alors :
> $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \overset{<}{\to} R]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

Corollaire. Si $\sum a_n$ converge, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \overset{<}{\to} 1]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Transf. d'Abel.

Remarque: en appliquant le th à $\sum (-1)^n a_n x^n$ on a aussi le résultat :

Si $\sum a_n x^n$ a pour rayon $R < \infty$

$\sum a_n (-R)^n$ converge

Alors $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \overset{>}{\to} -R]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n$$

Exemple: $\sum \frac{x^n}{n}$ a pour rayon $R = 1$

En $x = -1$, la série cv

Donc, par le th radial d'Abel

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \xrightarrow[x \to -1]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

3.4 Primitives/intégrales de la somme des séries entières réelles

Proposition. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Pour tout $[a,b] \subset \,]-R, R[$:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \int_a^b t^n \, \mathrm{d}t \right)$$

Preuve: $[a,b]$ segment inclus dans $]-R, R[$

on ne s'approche pas du bord.

donc $\sum a_n x^n$ cv normalement, donc unif

sur $[a,b]$ donc

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n t^n \, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_a^b$$

Corollaire. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Une primitive de sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$ est :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

qui est obtenue par primitivation terme à terme. Son rayon est R.

Exemple. Primitiver $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Preuve: S continue sur $]-R, R[$

donc une primitive est

$$x \longmapsto \int_0^x S(t)\,dt$$

À x fixé, $[0, x] \subset]-R, R[$ (ou $[x, 0]$ ...)

$$\int_0^x S(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$R\left(\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = R\left(\sum a_n x^n\right)$$

(mult. par x, $n+1 \sim n$, ...)

Attention ! $R\left(\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = R\left(\sum a_n x^n\right)$

mais le comportement au bord n'est pas le même.

$\sum x^n$ de rayon de cv $R=1$

et $\forall x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Par primitivation : $\forall x \in]-1,1[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$$

$$\parallel$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

de rayon de cv 1.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \qquad R=1}$$

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

3.5 Dérivabilité de la somme des séries entières réelles

Théorème.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

De plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Corollaire. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

De plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} S^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1) a_{n+k} x^n \end{aligned}$$

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \dots$$

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 \dots$$

En dérivant, on perd le terme constant

(et pas le premier terme)

par ex : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ 1^{er} terme est x

Preuve : Soit $f_n : x \longmapsto a_n x^n$

* $\sum f_n$ converge simplement sur $]-R, R[$
* les f_n sont $\mathcal{C}^1$ et $\forall n \geq 1$ $f_n'(x) = n a_n x^{n-1}$
* $\sum_{n \geq 1} f_n' = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$ est une série entière

de rayon de cv R (le même)

car $(n+1) a_{n+1} \sim n a_{n+1}$

donc $R\left(\sum (n+1)a_{n+1}x^n\right) = R\left(\sum a_{n+1}x^n\right)$

$= R\left(\sum a_{n+1}x^{n+1}\right)$

$= R$

donc $\forall\ [-A, A] \subset]-R, R[$

$\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément

sur $[-A, A]$

Ainsi $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est $\mathcal{C}^1$ sur tout $[-A, A]$

$\subset]-R, R[$, donc sur $]-R, R[$

et $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

Corollaire. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

De plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} S^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1)a_{n+k}x^n \end{aligned}$$

x^n $\quad nx^{n-1}$ $\quad n(n-1)x^{n-2}$

$n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$

$\frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$

Exemple. On considère $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ et en déduire l'expression de $f(x)$.

- $\dfrac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc par la règle de d'Alembert, $R = +\infty$

Donc f, somme de série entière, est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[= \mathbb{R}$

et $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \dfrac{x^{n-1}}{n!}$

Faux pour $n=0$

$\dfrac{n}{n!} = \dfrac{1}{(n-1)!}$ $\forall n \geq 1$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$

$= f(x)$

Donc f est sol de l'E.D. $y' = y$ avec $y(0) = 1$

Donc $f(x) = \exp(x)$

Exemple. Montrer que $g : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \neq 0,\quad g(x) = \dfrac{1}{x}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1\right)$

$\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots - 1\right)$

$$= \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n$$

On note $\forall x \in \mathbb{R}$ (y compris 0)

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n$$

c'est une somme de série entière de rayon $+\infty$

(car $\dfrac{1}{(n+1)!} \leq \dfrac{1}{n!}$ donc $R \geq R\left(\sum \dfrac{x^n}{n!}\right) = +\infty$)

donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\quad g(x) = S(x)$

S $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ entier

En posant $g(0) = S(0) = 1$, on a prolongé g en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$: c'est S.

Proposition. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et S sa somme.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Corollaire (Unicité des coefficients d'une série entière). Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b. On suppose que leurs sommes coïncident sur un intervalle ouvert non vide :

$$\exists \rho,\ 0 < \rho < \mathrm{Min}(R_a, R_b) \text{ t.q. } \forall t \in]-\rho, \rho[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

Alors les séries entières sont identiques :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$$

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n\, x^{n-k}$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n\, x^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!}\, a_{n+k}\, x^{n}$$ par glissement d'indice

En particulier $S^{(k)}(0) = k!\, a_k$ (le terme constant)

donc $a_k = \dfrac{S^{(k)}(0)}{k!}$

Preuve: $\sum a_n x^n$ $\quad \sum b_n x^n$

$$S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \forall |x| < R_a$$

$$S_b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad \forall |x| < R_b$$

$$\forall n \quad a_n = \frac{S_a^{(n)}(0)}{n!} = \frac{S_b^{(n)}(0)}{n!}$$ car S_a et S_b coïncident au voisinage de 0

$$= b_n$$

4 Développement en série entière en 0 d'une fonction d'une variable réelle

4.1 Développement en série entière d'une fonction

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0.
On dit que f **est développable en série entière sur** $]-r, r[$ ou **admet un développement en série entière** si et seulement si $]-r, r[\subset I$ et il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que :

$$\forall x \in \,]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque. *Souvent, on ne précise pas la valeur de $r > 0$, on dit simplement que f est développable en série entière* ***au voisinage de*** *0 ou* ***en*** *0.*

Remarque. *La fonction f peut être définie sur un intervalle plus grand que $]-R, R[$ ou $[-R, R]$.*
En revanche, si f n'est pas continue en $x_0 \neq 0$, alors $R \leqslant |x_0|$.

Proposition. Soit f une fonction qui admet un développement en série entière $\sum a_n x^n$ au voisinage de 0.

- Si f est paire, son développement en série entière est pair : $\forall p,\ a_{2p+1} = 0$.
- Si f est impaire, son développement en série entière est impair : $\forall p,\ a_{2p} = 0$.

4.2 Série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0. On suppose f de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On appelle **série de Taylor de** f la série entière :

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Proposition. Si f admet un développement en série entière sur $]-r, r[$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et elle coïncide sur $]-r, r[$ avec la somme de sa série de Taylor :

$$\forall x \in \,]-r, r[, \; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Remarque. *Attention ! Une fonction peut être $\mathcal{C}^\infty$ sans admettre de développement en série entière.*

Attention ! Une fonction peut admettre une série de Taylor convergente, sans pour autant coïncider avec la somme de cette série.

Exemple. La fonction $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \end{array}$ prolongée par continuité en 0 admet-elle un développement en série entière au voisinage de 0 ?

4.3 Pour montrer qu'une fonction admet un développement en série entière en 0

4.3.1 Opérations sur les fonctions développables en séries entières

Proposition.

- Si f et g admettent des DSE qui sont respectivement $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, alors $\lambda f + \mu g$ admet un DSE qui est :
$$\sum (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$$
Le rayon de convergence a été précisé précédemment.
- Si f et g admettent des DSE qui sont respectivement $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, alors fg admet un DSE qui est le produit de Cauchy des DSE de f et g :
$$\left(\sum a_n x^n\right)\left(\sum b_n x^n\right)$$
Le rayon de convergence a été précisé précédemment.
- Si f admet un DSE qui est $\sum a_n x^n$, alors f est dérivable, f' admet un DSE qui est :
$$\sum_{n \geqslant 1} n a_n x^{n-1}$$
Les rayons de convergences sont égaux.
- Si f admet un DSE qui est $\sum a_n x^n$, alors les primitives de f admettent un DSE qui sont :
$$K + \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$
Les rayons de convergences sont égaux.

4.3.2 Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral

Rappel : formule de Taylor avec reste intégral. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant 0, alors pour $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t}_{R_n(x)}$$

Proposition. Avec les notations précédentes, pour f de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, f admet un DSE(0) si et seulement si $R_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ sur un voisinage (non vide) de 0.

Remarque. *C'est un résultat plutôt théorique. Même si on l'utilise dans l'exemple suivant, l'utilisation du formulaire du § 4.3.4 est plus efficace, comme c'est le cas dans la recherche de développements limités.*

Exemple. Montrer que la fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

4.3.3 Utilisation d'une équation différentielle

Exemple. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, et que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Remarque. *Lorsque α est un entier naturel, la fonction est un polynôme et sont développement en série entière est obtenu par la formule du binôme, et est valable sur $\mathbb{R}$.*

4.3.4 Formulaire

Les développements issus de l'exponentielle (Rayon $+\infty$).

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{pour tout } x \in]-\infty, +\infty[$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Les développements issus de la série géométrique, de $(1+x)^\alpha$ (Rayon 1).

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \text{pour tout } x \in]-1, 1[$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Remarque. *Notons que la fonction* Arctan *est définie sur* $\mathbb{R}$*, mais son développement en série entière sur* $]-1,1[$ *(ou peut-être* $[-1,1]$*, mais pas plus).*

4.4 Calcul de la somme d'une série entière

Pistes.

- Connaître le formulaire du § 4.3.4 !
- Reconnaître des combinaisons linéaires (parfois aux premiers termes près) de SE du formulaire.
- Reconnaître des dérivées de SE connues. En particulier, pour $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) x^n$$

- Ne pas hésiter à factoriser par x, x^2 ou alors $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$ pour ajuster le degré de x.
- On peut dériver $S(x)$ en $S'(x)$, $S''(x)$ et faire apparaître une SE connue ou une équation différentielle satisfaite par $S(x)$.
- Si on connaît une relation de récurrence satisfaite par les a_n, on multiplie par x^n et on somme ces relations, pour obtenir une équation fonctionnelle satisfaite par $S(x)$.

Exemple. Déterminer la somme des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} n^2 x^n \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)^2}{n} x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{n!} x^n$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{(n+2)n!} x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} (2^n+3^n) x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$$

où $a_{n+1} = 2a_n$

5 Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

5.1 Série géométrique

Proposition. La série entière $\sum z^n$, appelée **série géométrique** de raison z, a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $|z| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

5.2 Série exponentielle

Définition. La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$, appelée **série exponentielle** a pour rayon de convergence $+\infty$. On appelle **exponentielle** sa somme, de sorte que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$$

Proposition. Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$$

Proposition. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

Remarque. *On peut définir, par exemple :*

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

qui prolongent à $\mathbb{C}$ le développement en série entière réel connu. On remarque qu'alors :

$$\sin(\mathrm{i}z) = i\operatorname{sh}(z)$$