Pour je : 531.48, 660.1, 660.9

Intégrales à paramètre

(intégrable en 0)

$f_1 : x \longmapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ $\quad t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ continue sur $]0,+\infty[$

f_1 $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ $\quad f_1'(x) = \frac{\sin x}{x}$

$f_2 : x \longmapsto \int_x^{+\infty} \cos t \; e^{-t}\,dt$ $\quad t \mapsto \cos t\, e^{-t}$ continue

f_2 $\mathcal{C}^1$ . . .

paramètre

$f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$ $\quad f$ $\mathcal{C}^1$? $f'(x) = ?$

$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+n}\,dt$ $\quad I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} ?$

paramètre entier

$f(x) = \int_I h(x,t)\,dt$

1 Continuité

1.1 Continuité des intégrales à paramètre

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $h : \begin{array}{rcl} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$

Si :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **continue** sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$|h(x,t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$

où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x.

Alors :

- pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur I
- la fonction : $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.

Remarque. *L'hypothèse de domination est vraiment l'hypothèse fondamentale de ce théorème.*
L'application de ce théorème permet de justifier en particulier que f est définie sur A. Mais l'analyse menée lors de l'étude de la convergence de l'intégrale fournit en général les clefs de la domination.

f de variable x

la continuité en x, on demande la continuité de h en x.

Exemple. On note $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\, dt$. Donner le domaine de définition de f, et étudier sa continuité.

Notons $h(x,t) = e^{-t^2} \cos(xt)$

Domaine de def de f ? Pour quels x l'intégrale existe

ie l'intégrale est convergente ?

- $t \mapsto e^{-t^2} \cos(xt)$ est continue (pour tout x) sur $[0,+\infty[$
- Au voisinage de $t \to +\infty$ (à x fixé)

$$e^{-t^2} \cos(xt) = O(e^{-t^2})$$
$$= O(e^{-t}) \quad \text{car } t < t^2 \text{ au voisinage de } +\infty$$

intégrable en $+\infty$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\, dt$ converge

ie $f(x)$ existe

Donc $D_f = \mathbb{R}$

Étude de la continuité

- $x \mapsto h(x,t) = e^{-t^2} \cos(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}$ "D_f"

$\forall t \in [0,+\infty[$ (interv. d'intégration)

• Domination :

$\forall t \in [0,+\infty[\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$|h(x,t)| = e^{-t^2} |\cos(xt)|$$

$$\leq e^{-t^2} \qquad \text{indép. de } x$$

intégrable sur $[0,+\infty[$

car $e^{-t^2} = \underset{+\infty}{O}(e^{-t})$

Donc par le th de continuité des int à paramètres

f est continue sur $\mathbb{R}$

ou interv. d'intégrati borné

Remarque. *Lorsque l'intégrale n'est pas généralisée, on peut utiliser comme fonction dominante une fonction constante.*

Exemple. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^1 \cos(xt)\,dt$. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

- $x \longmapsto \cos(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}$ $\forall t \in [0,1]$
- $\forall x$, $t \mapsto \cos(xt)$ est continue (par morc) sur $[0,1]$
- Domination:

$\forall t \in [0,1]$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$|\cos(xt)| \leq 1$ indép de x

intégrable sur $[0,1]$

Donc f continue sur $\mathbb{R}$.

Raisonnement classique. La continuité étant une propriété locale, on peut appliquer le théorème précédent localement, par exemple sur tout segment de A.

Remarque. *On ne peut pas modifier l'intervalle d'intégration ! Le caractère « local » porte bien sur la variable x, pas la variable d'intégration t.*

Exemple. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t}\,dt$ est continue sur $]0, +\infty[$.

On note $h(x,t) = \dfrac{e^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t}$ pour $t \in]0,+\infty[$ et $x \in]0,+\infty[$

Existence de l'intégrale ?

- $t \mapsto h(x,t)$ continue (par mcx) sur $]0,+\infty[$ $\forall x$
- Au voisinage de $t \to 0$ à x fixé.

$$h(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1 \cdot t}{x\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t}}{x} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

$t \mapsto h(x,t)$ intégrable en 0

- Au voisinage de $t \to +\infty$, à x fixé

$$h(x,t) = \frac{e^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t} \sim \frac{e^{-xt}\sin t}{t} = O\left(\frac{e^{-xt}}{t}\right) = o\left(e^{-xt}\right)$$

intégrable en $t \to +\infty$

Donc $\forall x > 0$, $f(x)$ existe.

Appliquons le th de continuité

- $x \mapsto h(x,t) = \dfrac{e^{-xt} \sin t}{x\sqrt{t} + t}$ continue sur $]0,+\infty[$

  $\forall t \in]0,+\infty[$

- <u>Domination:</u>

  $\forall x \in [A,+\infty[\subset]0,+\infty[\quad \forall t \in]0,+\infty[$

  $$|h(x,t)| = \frac{e^{-xt}\,|\sin t|}{x\sqrt{t} + t}$$

  $$\leq \frac{e^{-At}\,|\sin t|}{A\sqrt{t} + t} \quad \text{indép de } x$$

  intégrable sur $]0,+\infty[$ par l'étude précédente avec $x = A$.

$\leq \dfrac{1 \cdot |\sin t|}{0 + t}$ indép. de x

intégrable ~~sur $]0,+\infty[$~~

$\leq \dfrac{1}{t}$ non intégrable sur $]0,+\infty[$

Donc par continuité des intégrales à paramètre :

f est continue sur tout $[A,+\infty[\subset]0,+\infty[$

donc sur $]0,+\infty[$.

On pose
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$$

① Domaine de déf de Γ

① Mque Γ est définie sur $]0,+\infty[$

② Mque Γ est continue sur $]0,+\infty[$

① Soit $h(x,t) = e^{-t} t^{x-1}$ ← fonction de t

$= e^{-t} e^{(x-1)\ln t}$ ← fonction de x

- $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est continue (par mcx) sur $]0,+\infty[$ $\underline{\forall x}$
- Au voisinage de $t \to +\infty$

$$e^{-t} t^{x-1} = e^{-t} o(e^{t/2})$$
$$= o(e^{-t/2})$$ intégrable en $+\infty$ $\underline{\underline{\forall x}}$

- Au voisinage de $t \to 0$

$$e^{-t} t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$$ intégrable en 0 $\underline{\underline{\text{ssi}}}$ $1-x<1$

ie $x>0$

<u>Ainsi</u> $t \mapsto h(x,t)$ intégrable sur $]0,+\infty[$

<u>ssi</u> $x>0$. Par positivité,

$\Gamma(x)$ existe <u>ssi</u> $x>0$

Donc $D_\Gamma =]0,+\infty[$

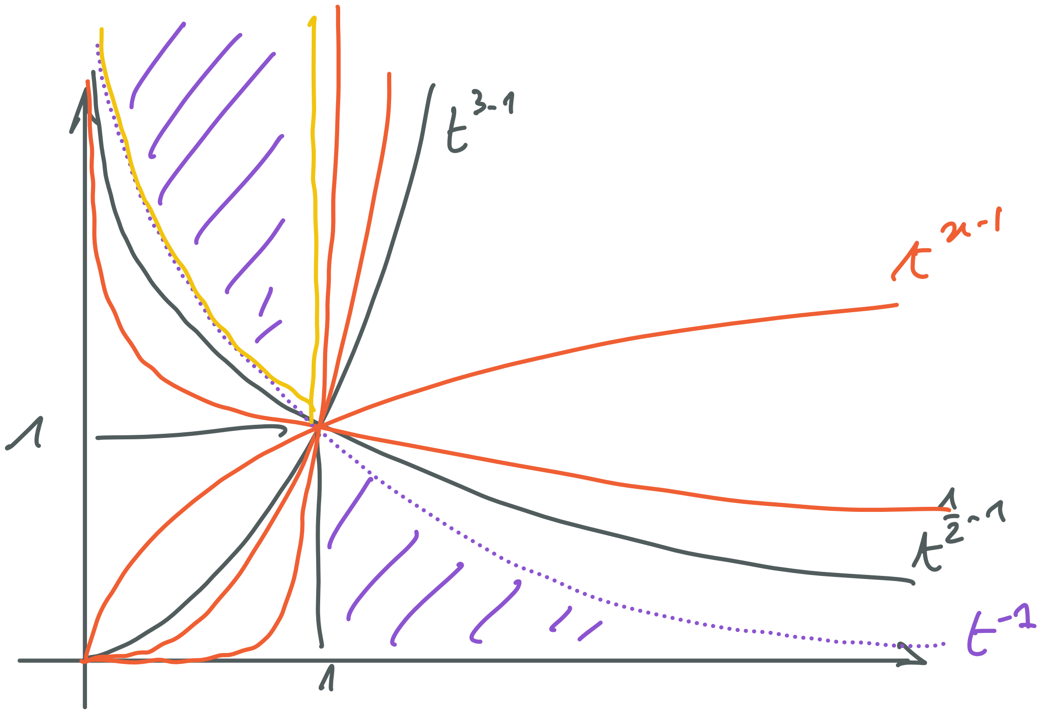
② <u>Étude de la continuité.</u>

- $x \mapsto h(x,t) = e^{-t} e^{(x-1)\ln t}$ est continue

sur $]0,+\infty[$ $\forall t \in]0,+\infty[$

• Dominations :

$$|h(x,t)| = t^{x-1} e^{-t}$$



Domination :

$\forall x \in [a,b] \subset]0,+\infty[\quad \forall t \in]0,+\infty[$

$$|h(x,t)| = t^{x-1} e^{-t}$$
$$= e^{(x-1)\ln t} e^{-t}$$
$$\leq \underbrace{\begin{cases} t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \\ t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t < 1 \end{cases}}_{\varphi(t)}$$

$\ln t > 0$

$\ln t < 0$

indépendant de x

φ continue par morceaux sur $]0,+\infty[$

au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) = t^{b-1}e^{-t}$ intégrable en $+\infty$
(cf (1))

au voisinage de 0, $\varphi(t) = t^{a-1}e^{-t}$ intégrable en 0
(cf (1))

Donc φ intégrable sur $]0,+\infty[$

Donc Γ est continue sur tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$
donc sur $]0,+\infty[$.

<u>Remarque</u>: certains donnent par
$$\varphi(t) = \max\left(t^{a-1}e^{-t}, t^{b-1}e^{-t}\right)$$

$$\int_I h_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} ?$$

$$\int_I h(x,t)\,dt \xrightarrow[x\to a]{} ?$$

$a = +\infty$
$a \in \mathbb{R}$
$a = -\infty$

1.2 Limite des intégrales à paramètre

Théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A éventuellement infinie et $h : \begin{array}{ccc} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$

Si :

- pour tout $t \in I$, $h(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$|h(x,t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$

où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x.

Alors :

- ℓ est intégrable sur I
- $\displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque. *Il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.*

Exemple. On note $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$ et on donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v = \sqrt{\pi}$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ pour $x \to +\infty$. Donner un équivalent pour $x \to +\infty$.
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ pour $x \to 0$.

Preuve:

- $\forall x, t \quad |h(x,t)| \leq \varphi(t)$

  donc, à la limite quand $x \to a$ à t fixé

  $$|\ell(t)| \leq \varphi(t)$$

  donc ℓ intégrable sur I.

- Mque $\displaystyle\int_I h(x,t)\,dt \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\,dt$ chap 660

  en utilisant la caractérisation séquentielle.

Rappel: $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \left(\forall (u_n)_n \text{ tq } u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \quad f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \right)$

$\boxed{\Rightarrow}$ bien sûr ! composition de limite

$\boxed{\Leftarrow}$ intéressant.

Soit $(u_n)_n$ tq $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

Mq $\int_I h(u_n,t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I \ell(t)\,dt$ **531**

On note $h_n(t) = h(u_n,t)$

- <u>Convergence simple :</u>

Soit $t \in I$ fixé.

$h_n(t) = h(u_n,t)$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell(t)$ car $h(x,t) \xrightarrow[x\to a]{} \ell(t)$

et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

donc $h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} \ell$

- <u>Domination :</u>

$\forall t\in I,\ \forall n\in\mathbb{N}$

$|h_n(t)| = |h(u_n,t)|$

$\leq \varphi(t)$ par hyp.

indep de n

intégrable sur I

Donc par cv dominée,

$$\int_I h_n(t)\,dt \longrightarrow \int_I \ell(t)\,dt$$

Vrai pour toute suite $(u_n)_n$ qui cv vers a

donc $\displaystyle\int_I h(x,t)\,dt \xrightarrow[x\to a]{} \int_I \ell(t)\,dt.$

$\square$

Exemple. On note $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$ et on donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v = \sqrt{\pi}$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ pour $x \to +\infty$. Donner un équivalent pour $x \to +\infty$.
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ pour $x \to 0$.

On note $h(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}$ pour $t \in [0, +\infty[$ et $x \in]0, +\infty[$

0. <u>Existence de $f(x)$</u>

- $t \mapsto h(x,t)$ continue sur $]0, +\infty[$
- Au vois de $t \to 0$, $\dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} \sim \dfrac{1}{1} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$ intégrable en 0
- Au vois de $t \to +\infty$ $\dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} = o(e^{-xt})$ intégrable en $+\infty$.

1. <u>Étude en $x \to +\infty$</u>

- À t fixé >0, $h(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

- <u>Dominons:</u> x doit pouvoir tendre vers $+\infty$

  $\forall x \in [1, +\infty[, \quad \forall t \in]0, +\infty[$

  $$|h(x,t)| = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+1}}$$

  indép de x

  intégrable sur $]0, +\infty[$ par le point 0.

Par convergence dominée à paramètre continu :

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} 0 \, dt = 0$$

(1) Équivalent de $f(x)$ en $x \to +\infty$?

2 pistes : • intégration par parties

$$[\quad] - \underbrace{\int}_{\substack{\text{négligeable} \\ \text{devant } [\;]}}$$

• changement de variable

→ mise en facteur d'un terme $\to 0$

On pose $xt = u$ (à x fixé)

$x\,dt = du$

u de 0 à $+\infty$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{u}{x} + 1}} \cdot \frac{du}{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u + x}} \, du$$

N'aboutit pas en $+\infty$

ça fera en 0

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{1}{\sqrt{t+1}}\,dt = \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\frac{1}{\sqrt{t+1}}\right]_0^{+\infty} - \int \frac{e^{-xt}}{-x} \cdot \frac{1}{t^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\underbrace{\int e^{-xt}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{(t+1)^{3/2}}\,dt}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\,o(1)$$

$$\sim \frac{1}{x}$$

On fait une intégration par parties, avec existence de limite finie du crochet :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt \qquad (1+t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{-x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(1+t)^{3/2}}\,dt$$

$$= 0 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x}\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{(1+t)^{3/2}}\,dt}_{g(x)}$$

où $g(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ par convergence dominée

à paramètre continu, comme pour f, avec

Par domination :

$$\left|\frac{e^{-xt}}{(1+t)^{3/2}}\right| \leq \frac{e^{-t}}{(1+t)^{3/2}} \quad \forall x \in [1,+\infty[$$

Donc $\quad f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}o(1)$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$