Pour me : 541.1, 541.4

Séries de fonctions numériques - interversion série / intégrale

$\sum f_n$ $\qquad f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $t \longmapsto f_n(t)$

cv simple : $\forall t \in I$, $\sum f_n(t)$ cv (série numérique)

on note S sa somme : $S : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$

cv normale : $\sum \|f_n\|_\infty^I$ cv (série numérique)

$|f_n(t)| \leq$ indep de t t.q. série cv

cv uniforme : $\sum f_n$ cv simplement, $(R_n)_n$ cv unif vers $(t \mapsto 0)$

$|R_n(t)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)| \leq$ indep de t $\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^k$

$\sum f_n$

S

$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,dt$

⚠ pas de linéarité

1 Intégration

1.1 Intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme

Théorème d'intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme.

Soit $a < b$, et $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un segment $[a, b]$.
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ (on note S sa somme),
- $[a, b]$ est un segment,
- les f_n sont continues,

(les int ne sont pas généralisées)

alors :

- la série $\sum \left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \right)$ converge,
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t$

Exemple. Soit $(a_n)_n$ une suite de complexe telle que $\sum a_n$ converge absolument. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note :

$$f(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \sin(pt)$$

Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) f(t)\,\mathrm{d}t = a_m$$

Preuve : utiliser le th d'interv lim / intégrale par cv uniforme à $(S_n)_n$.

Exemple : $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \left(a_p \sin(pt) \sin(mt) \right) dt = ?$

- Étudions la cv de $\sum f_p$ où $f_p(t) = a_p \sin(pt) \sin(mt)$

  $\forall t \in [-\pi, \pi] \quad |f_p(t)| \leq |a_p|$

  indep de t
  tg série convergente

  donc $\sum f_p$ cv normalement, donc uniformément sur $[-\pi, \pi]$

- $[-\pi, \pi]$ est un segment
- les f_p sont continues

Donc: on peut intervertir $\sum$ et $\int$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} f_p(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f_p(t)\,dt$$

On calcule: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_p(t)\,dt = a_p \int_{-\pi}^{\pi} \sin(pt)\,\sin(nt)\,dt$

(−) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

(+) $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

$$= a_p \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(p-n)t - \cos(p+n)t\right)dt$$

Or $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k\neq 0\end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } p\neq n \\ \pi a_n & \text{si } p=n\end{cases}$$

D'où le résultat

1.3 Interversion $\sum / \int$ sur un intervalle quelconque

Remarque. *Le théorème qui suit s'applique en particulier lorsque les intégrales sont généralisées.*

Théorème d'intégration terme à terme.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- les f_n et S sont continues par morceaux sur I
- les f_n sont intégrables sur I,
- la série numérique $\sum \left(\int_I |f_n(t)| \, \mathrm{d}t \right)$ converge,

alors :

- la fonction S est intégrable sur I,
- $\int_I S(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t$

Remarque.

- *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \, \mathrm{d}t$$

Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et des intégrales envisagées.

- *L'intégrabilité des f_n sert à justifier l'existence des $\int_I f_n$.*
- *L'hypothèse importante de ce théorème est la convergence de la série $\sum \int |f_n|$.*

On calcule $\int_I |f_n(t)| \, dt$ et voit que c'est le t.g. d'une série cv.

Exemple. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$.

Autre énoncé : Exprimer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ comme somme d'une série numérique.

- On note $S(t) = \dfrac{\ln t}{1+t^2}$

S cont sur $]0, 1]$

Au vois de 0 $f(t) \underset{t \to 0}{\sim} \ln t$

S intégrable sur $]0, 1]$

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \int_0^1 \ln t \sum_{n=0}^{+\infty} (-t^2)^n \, dt$$

$$\forall t \in]0,1[\qquad \frac{\ln t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln t \, (-t^2)^n$$

somme géom. de raison $(-t^2)$ de 1er terme $\ln t$.

On note $f_n :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto \ln t \, (-t^2)^n$$

- $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1[$

Bien sûr ! C'est nous qui l'avons introduite

et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \frac{\ln t}{1+t^2}$

- les f_n et la somme sont continues par morceaux sur $]0,1[$

- Au voisinage de 0, $f_0(t) = \ln t$ intégrable en 0

pour $n \geq 1$ $\quad f_n(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ intégrable en 0

Au voisinage de 1, f_n continue donc intégrable.

- ? cv $\sum \int |f_n|$? on travaille sur le t.g

$$\int_0^1 |f_n(t)| \, dt = \int_0^1 \left| \ln t \, (-t^2)^n \right| dt$$

$$= \int_0^1 t^{2n} (-\ln t) \, dt$$

par parties, sous réserve de limites finies des crochets

$$= \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} (-) \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{2n+1} (-) \cdot \frac{1}{t} \, dt$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{2n+1} \int_0^1 t^{2n} \, dt$$

car $t^{2n+1} \ln t \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$

$$= \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\sim \frac{1}{4n^2}$$ donc c'est le t.g d'une série convergente

$$\underline{\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |f_n| \quad \text{converge}}$$

Donc, par interversion série/intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \ln t \, (-t^2)^n \, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (-) \int_0^1 t^{2n} (-\ln t) \, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n-1)^2}$$ par glissement d'indice

1.2 Interversion $\sum / \int$ sur un intervalle quelconque, dans le cas d'une série positive

Théorème d'intégration terme à terme, cas positif.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- les f_n sont positives
- ~~$\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme)~~,
- les f_n et S sont continues par morceaux sur I
- ~~les f_n sont intégrables sur I~~,

alors, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

- $\displaystyle\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque.

- *En particulier, l'intégrabilité de* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *sur* I *équivaut à* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$.

Exemple. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Pour utiliser ce th :

Les f_n sont positives.

On calcule, dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\int_I \sum f_n \,\text{--} \quad = \text{--}$$
$$= \text{--}$$

$< +\infty$

donc les séries et intégrales convergent, et :

$=$ (égalité dans $[0, +\infty[$)

Exemple. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Pour $t \in]0,+\infty[$,

$$\frac{t}{e^t - 1} = te^{-t} \cdot \frac{1}{1-e^{-t}}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} t e^{-nt}$$

série géom. de raison $e^{-t} \in]0,1[$ de 1er terme te^{-t}

On note $f_n(t) = te^{-nt}$

Les f_n sont positives. On calcule, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\,dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}\,dt$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t e^{-nt}\,dt$$

par parties, sous réserve de limites finies du crochet

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left[t\,\frac{e^{-nt}}{-n} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \cdot \frac{e^{-nt}}{-n}\,dt \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$< +\infty$$

donc les séries et intégrales envisagées sont convergentes

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ (dans $[0, +\infty[$)

1.4 Utilisation de la convergence dominée

Remarque. *Lorsque le théorème du paragraphe précédent ne s'applique pas (lorsque $\sum \int_I |f_n|$ ne converge pas), on peut chercher à appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(S_n)_n$ des sommes partielles, ou à celle $(R_n)_n$ des restes, de la série de fonctions $\sum f_n$.*

Exemple. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Pour $t \in]0,+\infty[$, $\dfrac{1}{1+e^t} = e^{-t} \cdot \dfrac{1}{1-(-e^{-t})}$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} (-e^{-t})^n$$

série géométrique de raison $-e^{-t}$

où $|-e^{-t}| < 1$

Pas sur un segment $\longrightarrow$ pas §1.1

Pas des fct positives $\longrightarrow$ pas §1.2

? cv $\sum \int |f_n|$? ? $\quad f_n(t) = (-1)^{n+1} e^{-nt}$

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dt$$

$$= \frac{1}{n} \quad \text{tg série divergente}$$

$\longrightarrow$ pas §1.3

$\rightarrow$ relou du th convergence dominée en écrivant :

$$\frac{1}{1+e^t} = \sum_{k=\cancel{0}1}^{n} (-1)^{k+1} e^{-kt} + R_n(t)$$

$f : t \mapsto \dfrac{1}{1+e^t}$ continue sur $[0,+\infty[$, intégrable en $+\infty$

car $f(t) \underset{+\infty}{\sim} e^{-t}$.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}\,dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} e^{-kt} + R_n(t) \right) dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} e^{-kt}\,dt + \int_0^{+\infty} R_n(t)\,dt$$

par linéarité.

(et oui ! la somme est finie)

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} + \int_0^{+\infty} R_n(t)\,dt \quad (*)$$

$\forall n$

$I \xrightarrow[n\to+\infty]{} I$

et quand $n \to +\infty$?

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$

(série harmonique alternée)

- Mque $\displaystyle\int_0^{+\infty} R_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

* $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} (t \mapsto 0)$

Comme reste d'une série convergente

* <u>Domination:</u>

$$\left| R_n(t) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} e^{-kt} \right|$$

$$\leq e^{-(n+1)t}$$

par le th des séries alternées

car $\left(e^{-kt}\right)_k$ positive, décroissante, de limite nulle $\forall t>0$.

$$\leq e^{-t} \quad \text{indep de } n$$

intégrable sur $]0,+\infty[$

Par <u>cv dominée</u>, $\displaystyle\int_0^{+\infty} R_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc, à la limite dans (*)

$$I = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

$$|R_n(t)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} e^{-kt} \right|$$

$$= \left| (-1)^{n+2} e^{-(n+1)t} \cdot \frac{1}{1+e^{-t}} \right|$$

$$f(t) = \underbrace{S_n(t)} + \underbrace{R_n(t)}$$

Rmq : On peut aussi écrire :

$$\int_0^{+\infty} S_n(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} f_k(t)\,dt \quad \text{par linéarité.}$$

$$\| \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$$

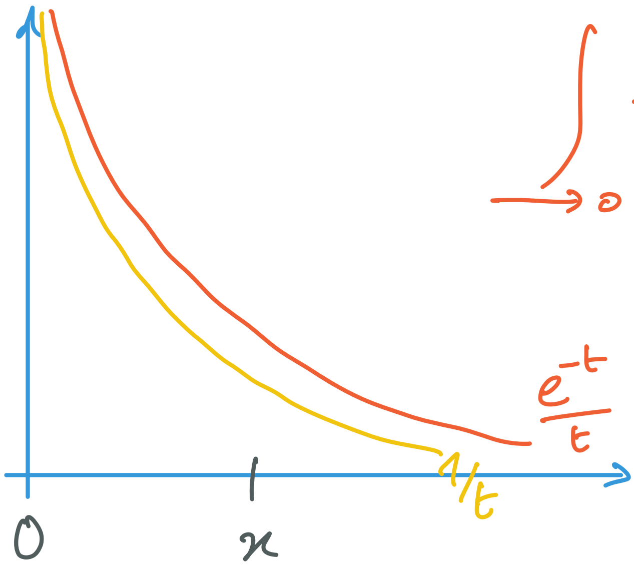
$$\Big\downarrow {\scriptstyle n \to +\infty} \qquad \Big\downarrow {\scriptstyle n \to +\infty}$$

Converge dominée

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

$\boxed{650.29}$ (c) Mque $\displaystyle\int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \xrightarrow[h\to 0]{} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

- $\cancel{\displaystyle\frac{1-e^{-t}}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} -1}$ $\quad g(t) \underset{0}{\sim} \ln t$



$\displaystyle\int_{\to 0} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ diverge.

Tout faux !

$$\cancel{\int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \int_{0}^{bh} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_{0}^{ah} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \xrightarrow[h\to 0]{} 0 - 0}$$

$$\int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \underbrace{\int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt}_{} + \underbrace{\int_{ah}^{bh} \frac{1}{t}\,dt}_{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$= \int_0^{bh} \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt - \int_0^{ah} \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt + \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

où les 2 intégrales sont

des restes d'intégrales convergentes

$$\longrightarrow 0 - 0 + \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Autre méthode :

$$\int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \underbrace{\int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt}_{} + \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\left| \qquad \right| \leq \int_{ah}^{bh} \|g\|_\infty^{[0,1]}\,dt$$

$$= h(b-a)\,\|g\|_\infty^{[0,1]}$$

$$\forall h < \frac{1}{a}$$