$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$$

f cpm sur $[a, +\infty[$

Si F primitive de f

On calcule sous réserve de limite finie du crochet

$$\int_a^{\to +\infty} f(t)\,dt = \left[F(t) \right]_a^{\to +\infty}$$

pour jeu : 650.1, 650.2, 650.7

pour lu : DS 3 4h.

2.5.3 Intégration par parties

Terminons par une formule elle aussi importante, qu'il faut appliquer avec précaution pour les intégrales généralisées. Elle est en particulier utile pour établir une relation de récurrence satisfaite par une intégrale dépendant de n.

Théorème.

Si :

- f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$
- $f(t)g(t)$ admet une limite finie en $+\infty$

Alors :

- les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature
- en cas de convergence :

$$\int_a^{+\infty} f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^{t\to+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. *Il convient de savoir justifier une intégration par parties par une utilisation précise du théorème précédent. Néanmoins, lorsqu'il s'agit d'un simple calcul, on ne vérifie pas les hypothèses de régularité. Dans la pratique, on écrit :*

$$\int_a^b \overset{\nearrow}{u}(t)\underset{\searrow}{v}(t)\,\mathrm{d}t = [U(t)v(t)]_a^b - \int_a^b U(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

en s'assurant que le « crochet » a des limites finies. La flèche montante symbolise la primitivation, et la flèche descendante la dérivation. U désigne une primitive de u.
La convergence de l'intégrale est justifiée a posteriori par les limites finies du « crochet » et la convergence de la nouvelle intégrale.

Exemple. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Au brouillon :

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$$

$$= \left[t^n(-)e^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} n t^{n-1}(-)e^{-t}\,dt$$

$$= 0 + n I_{n-1}$$

Montrons par récurrence que : $\forall n$ I_n est une intégrale convergente et $I_n = n!$

- $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ convergente (ex de réf)

$$= \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty}$$

$= 0 + 1$

$= 0!$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose ~~I_n converge~~ l'intégrale I_n est convergente (la ~~suite $(I_n)_n$ converge~~) et $I_n = n!$

On effectue une intégration par parties, sous réserve de limite finie du crochet et de convergence des intégrales :

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} \, dt$$

$$= \left[t^{n+1} \cdot (-) e^{-t} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (n+1) t^n (-) e^{-t} \, dt$$

$$= 0 - 0 + (n+1) I_n$$

Comme I_n est une intégrale convergente, I_{n+1} aussi

et $I_{n+1} = (n+1)\, n!$ par HR

$= (n+1)!$

- $\forall n$, I_n est une intégrale cv, de valeur $n!$

2.5.2 Changement de variable

Le théorème du changement de variable est une technique efficace, et la formule doit pouvoir être utilisée « dans les deux sens ». L'entrainement permet d'avoir l'initiative de certains changements de variable classiques.

Le théorème est présenté pour pour l'étude de $\displaystyle\int_a^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, mais se transpose aux cas d'un autre intervalle semi-ouvert, d'un intervalle ouvert, et bien-sûr au cas d'un segment.

Théorème.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,+\infty[$. Si $\varphi : [\alpha,\beta[\to [a,+\infty[$ est :

- une bijection
- strictement croissante
- de classe $\mathcal{C}^1$

alors

- les deux intégrales $\displaystyle\int_a^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^{\to\beta} (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature ;
- elles sont égales en cas de convergence.

Remarque. *La convergence de l'intégrale est justifiée a posteriori par le changement de variable et la convergence de la nouvelle intégrale.*

Remarque. *Dans la pratique, on dit que l'on effectue le changement de variable $t=\varphi(u)$ et l'on écrit :*

t	*devient*	$\varphi(u)$
$\mathrm{d}t$	*devient*	$\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$
t *de* a *à* b	*devient*	u *de* α *à* β

Remarque. *Il convient de savoir justifier un changement de variable par une utilisation précise du théorème précédent. Néanmoins, lorsqu'il s'agit d'un simple calcul, ou pour des changements de variable très simples, notamment affines, on ne précise pas les hypothèses de régularité.*

Exemple : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt$

l'intégrale est généralisée en $+\infty$.

- $t \mapsto \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$ est continue (par morceaux) sur $[1,+\infty[$
- On pose $t = u^2$

$dt = 2u\,du$

u varie de 1 à $+\infty$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt$ est de même nature que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(u^2)}{u} \, 2u \, du = \int_1^{+\infty} 4 \ln u \, du$$

qui est de même nature que $\left[u \ln u - u\right]_1^{+\infty} \longrightarrow +\infty$

Donc l'intégrale est divergente.

2 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Remarque. *Sans autre précision, dans cette section, a et b sont tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et I désigne un intervalle dont les extrémités sont a et b.*
Lorsque a et b sont finis et $I = [a, b]$, il s'agit d'un segment.
Lorsque a est fini, $b = +\infty$ et $I = [a, +\infty[$, il s'agit du cas étudié au paragraphe précédent.

2.1 Intégrale convergente, intégrale divergente

Définition. Soit f une fonction continue par morceaux sur I.

- Lorsque $I = [a, b[$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \xrightarrow[x<b]{} b$. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

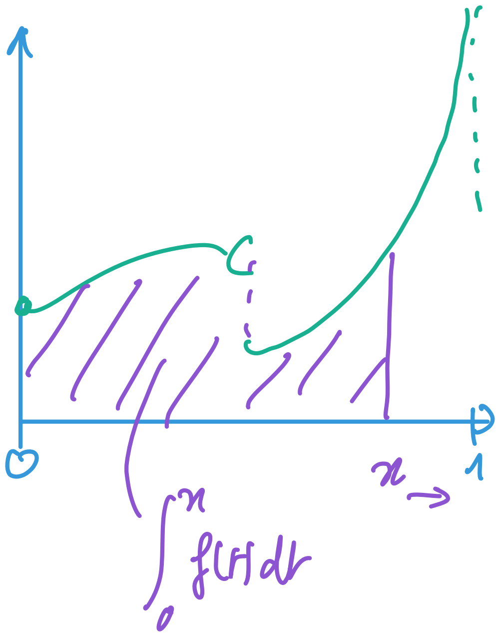
- Lorsque $I =]a, b]$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\to a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \xrightarrow[x>a]{} a$. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

- Lorsque $I =]a, b[$, on dit que l'intégrale est **doublement généralisée**.
  Prenant c tel que $a < c < b$, on dit qu'elle converge si et seulement si $\displaystyle\int_{\to a}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
  Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ la somme de ces deux intégrales convergentes.

Remarque. *Par le caractère local, cette double convergence ne dépend pas du choix de c. Par la relation de Chasles, la valeur de l'intégrale ne dépend pas du choix de c.*

$I = [0, 1[$

$\displaystyle\int_0^{\to 1} f(t)\,dt$

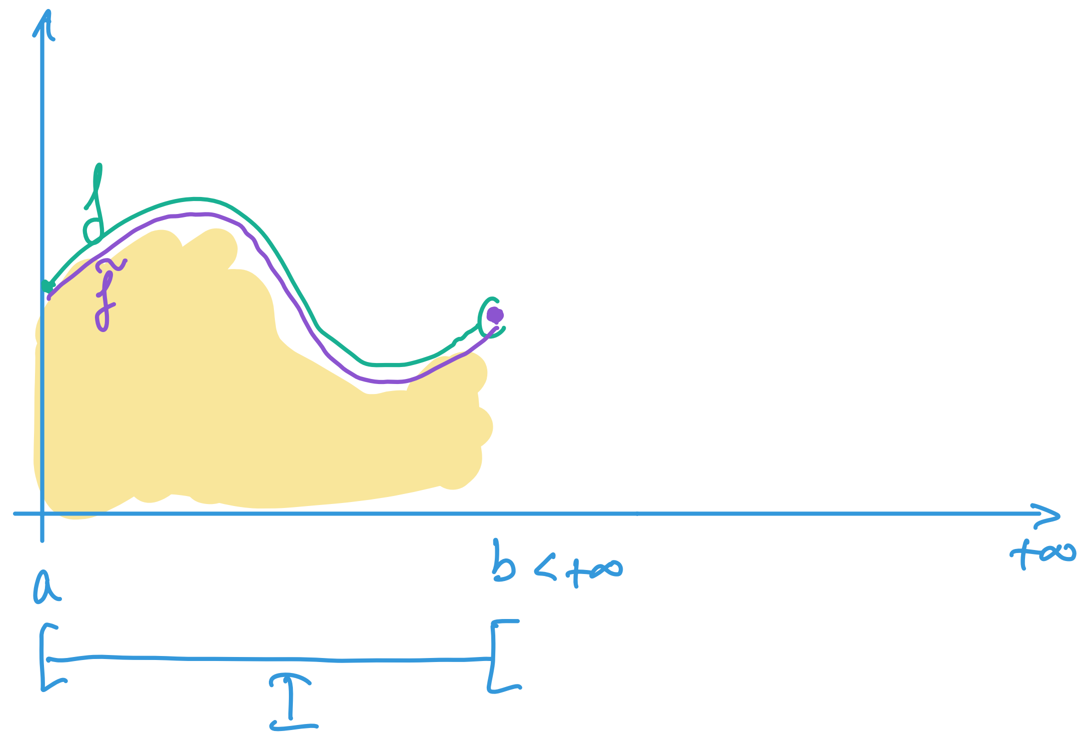


Proposition. Lorsque a (resp. b) est fini, et que f se prolonge par continuité en a (resp. b), alors l'intégrale généralisée en a (resp. b) converge et sa valeur coïncide avec l'intégrale de la fonction prolongée. On dit que l'intégrale est **faussement généralisée**.

Remarque. *Ça n'aurait aucun sens de parler d'intégrale faussement généralisée en* $\pm\infty$.

Exemple. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Preuve:



On suppose que f cpm sur $[a, b[$ et admet une limite finie ℓ en b (à gauche) (et $b < +\infty$)

On prolonge f par continuité en b en posant:

$$\tilde{f} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$t \longmapsto \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [a,b[\\ \ell & \text{si } t = b. \end{cases}$$

On sait que $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}(t)\,dt$ existe (int sur un segment)

On veut montrer que $\int_a^{\to b} f(t)\,dt$ converge

i.e. son intégrale partielle admet une limite finie ?

$$\left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^b \tilde{f}(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_a^x \tilde{f}(t)\,dt - \int_a^b \tilde{f}(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_x^b \tilde{f}(t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_x^b |\tilde{f}(t)|\,dt$$

$$\leq \int_x^b \|\tilde{f}\|_\infty^{[a,b]}\,dt$$

($\tilde{f}$ est continue sur $[a,b]$)

$$= (b-x)\,\|\tilde{f}\|_\infty$$

$$\xrightarrow[x \to b]{} 0$$

Exemple. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$.

- $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$

- Au voisinage de $t \to 0$

$$\frac{\sin t}{t} \sim \frac{t}{t}$$

$$= 1$$

$$\xrightarrow[t \to 0]{} 1$$

donc $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ se prolonge par continuité en 0

donc l'intégrale $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est

faussement généralisée, convergente.

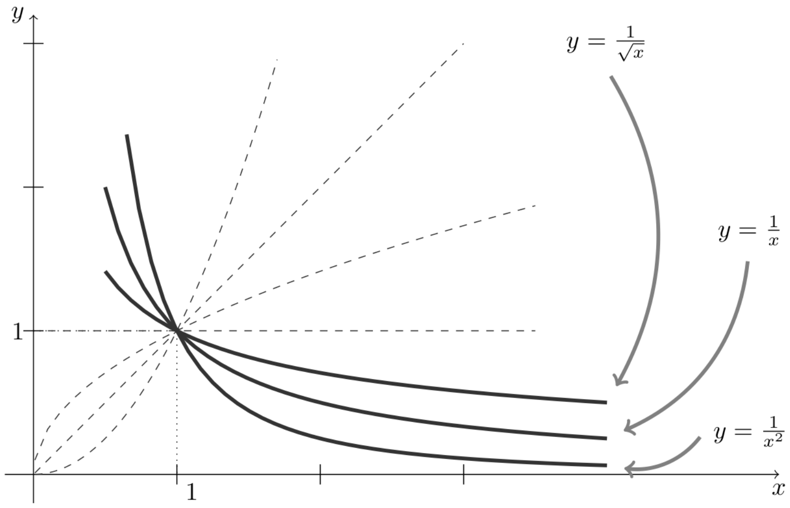
2.2 Cas des fonctions positives

Remarque. *Lorsque f est positive, on autorise l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$ en cas de divergence.*
Un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de la convergence de l'intégrale.

2.3 Exemples de référence

Intégrales de Riemann en $+\infty$.

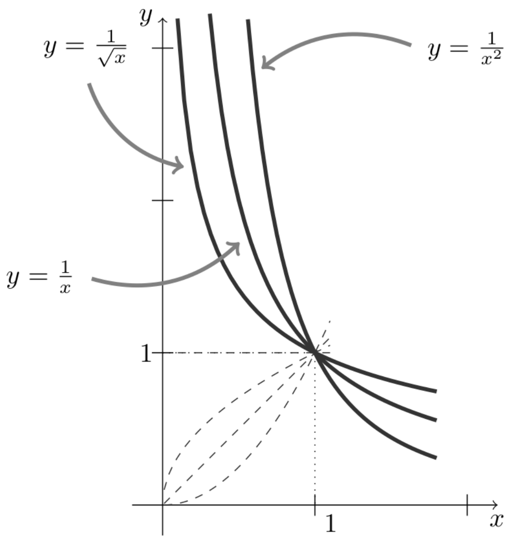
> L'intégrale généralisée $\displaystyle\int^{\to+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.



$t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,1]$

Intégrales de Riemann en 0.

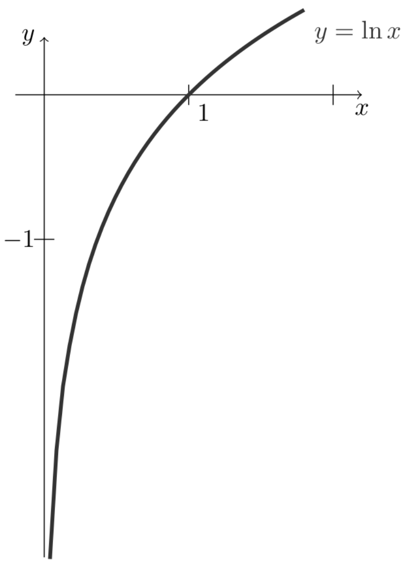
> L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.



Exponentielle en $+\infty$.

> L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Logarithme en 0. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} \ln t\,\mathrm{d}t$ converge. Sa valeur est négative.



Preuve : Sous réserve de limite finie du crochet :

$$\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t = \left[t\ln t - t\right]_{t\to 0}^{1}$$

$$= -1 - 0$$

$$= -1$$

donc l'intégrale converge et vaut -1.

2.4 Propriétés

Linéarité. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur I, λ et μ deux scalaires. Si les intégrales généralisées $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors $\int_I \lambda f(t)+\mu g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_I \lambda f(t)+\mu g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$$

Corollaire. Si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_I f(t)+g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Remarque. *Que penser de l'écriture :*

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty}\frac{1}{(t+1)}\,\mathrm{d}t\ ?$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\,dt$$

Preuve : cas où $I=[a,+\infty[$

L'intégrale partielle

$$\int_a^x \lambda f(t)+\mu g(t)\,dt = \lambda\int_a^x f(t)\,dt + \mu\int_a^x g(t)\,dt$$

par linéarité de l'intégrale sur $[a,x]$.

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{} \lambda\int_a^{+\infty} f(t)\,dt + \mu\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$$

par opérations sur les limites

d'où la cv et la valeur de $\int_a^{+\infty}\lambda f(t)+\mu g(t)\,dt$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty}\frac{1}{(t+1)}\,\mathrm{d}t\ ?$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\,dt$$

⚠ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,dt$ diverge !!

Toujours valider la cv des intégrales pour utiliser la linéarité.

Rmq : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\,dt$ est convergente.

en effet : sous réserve de limite finie des crochets

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \Big[\ln t - \ln(t+1)\Big]_1^{+\infty}$$

$$= \Big[-\ln\big(1+\tfrac{1}{t}\big)\Big]_1^{+\infty}$$

$$= 0 + \ln 2$$

donc l'intégrale converge et vaut $\ln 2$.

$\displaystyle\sum_n u_n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

$\displaystyle\int_a^{+a} f(t)\,dt \qquad \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$

Positivité. Soit f une fonction cpm sur I d'intégrale généralisée $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ convergente.

Si $\forall t \in I,\ f(t) \geqslant 0$, alors $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Croissance. Soit f et g deux fonctions cpm sur I, d'intégrales généralisées sur I convergentes.

Si $\forall t \in I,\ f(t) \leqslant g(t)$, alors $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$.

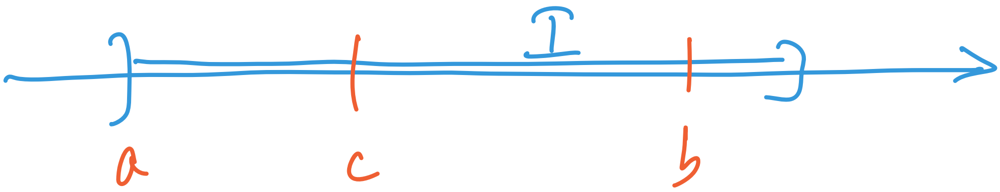
Remarque. *Pour les intégrales généralisées convergentes, lorsque $a > b$, on définit par convention :*

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

Relation de Chasles. Soit f une fonction continue par morceaux sur I, d'intégrale généralisée sur I convergente.
Pour tous a, b, c éléments ou extrémités de I, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

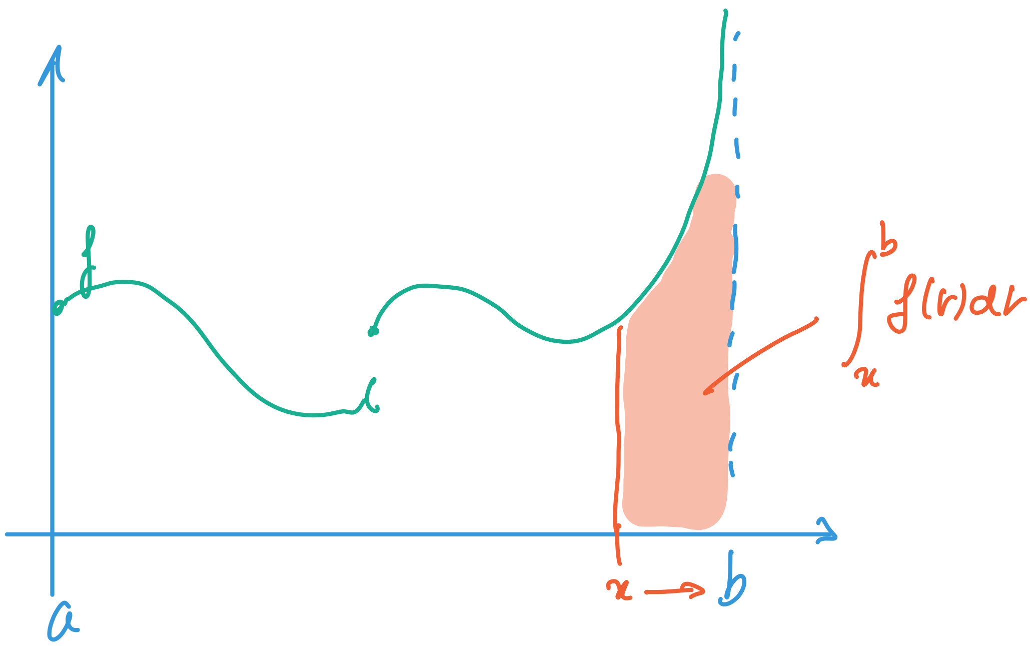
avec convergence des intégrales impliquées.



Proposition. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, telle que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

Pour $x < b$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on l'appelle **reste** de l'intégrale convergente, et :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \underset{<}{\to} b]{} 0$$



⚠ On a besoin de la convergence de l'intégrale

Preuve: On a supposé $\int^{\to b} f(t)\,dt$ converge.

Par la rel. de Chasles:

$$\int_x^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\xrightarrow[x \to b]{} \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt$$

$$= 0$$

3 Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Remarque. *Sauf mention contraire, I désigne un intervalle, et f une fonction continue par morceaux sur I.*

3.1 Convergence absolue d'une intégrale généralisée

Définition. On dit que l'intégrale $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si et seulement si l'intégrale $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Remarque. *L'intérêt de cette notion est de remplacer, lors de l'étude de la convergence d'une intégrale généralisée, l'intégrande par une fonction positive, ce qui donne accès aux théorèmes de convergence par comparaison, par équivalent, par comparaison asymptotique, et qui sont étudiés dans cette section.*

Théorème.

Soit f continue par morceaux sur I.
Si :

- $\int_I f$ converge absolument *i.e.* $\int_I |f|$ converge.

Alors :

- $\int_I f$ converge
- $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$.

Remarque.

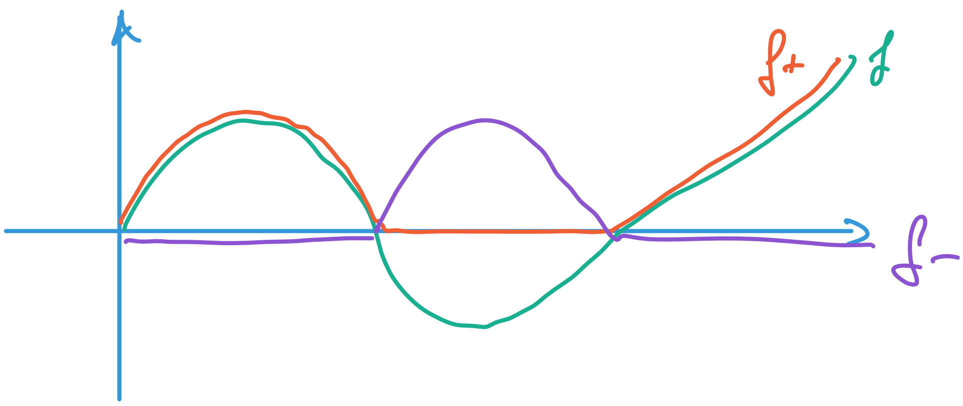
- *Il s'agit bien d'une condition suffisante, mais non nécessaire.*
  La convergence, et la non convergence absolue de $\int_1^{\to+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ *fournit un contre-exemple classique qu'il convient d'avoir à l'esprit.*
- *Pour une fonction positive, convergence et convergence absolue de l'intégrale sont des notions équivalentes.*

Preuve :

Cas où f à valeurs réelles :

On note $f_+ : x \longmapsto \mathrm{Max}(f(x), 0)$

$f_- : x \longmapsto \mathrm{Max}(-f(x), 0)$



f_+ et f_- sont positives.

On a : $f = f_+ - f_-$

$|f| = f_+ + f_-$

<u>Cas où $I = [a, +\infty[$.</u>

On travaille sur les int. partielles.

$$\int_a^x f_+(t)\,dt \leq \int_a^x |f(t)|\,dt$$
$$\leq \underbrace{\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt}_{\in \mathbb{R} \text{ car } \int^{+\infty} |f| \text{ converge}} < +\infty$$

donc la fonction croissante $x \longmapsto \int_a^x f_+(t)\,dt$ est majorée donc admet une limite finie pour $x \to +\infty$.

Donc $\int_a^{+\infty} f_+(t)\,dt$ converge.

De même, $\int_a^{+\infty} f_-(t)\,dt$ converge

Donc, par linéarité, $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

. $\forall x > a$, $\left| \int_a^x f(t)\,dt \right| \leq \int_a^x |f(t)|\,dt$

Par passage à la limite dans l'inégalité large

$$\left| \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$$

Cas où $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$

$\forall t \quad f(t) = \mathrm{Re}\, f(t) + i\, \mathrm{Im}\, f(t)$

Or $|\mathrm{Re}\, f(t)| \leq |f(t)|$

donc, par majoration, $\int_a^{\to +\infty} \mathrm{Re}\, f(t)\, dt$ converge absolument

donc converge.

De même pour $\int_a^{\to +\infty} \mathrm{Im}\, f(t)\, dt$.

Donc $\int_a^{\to +\infty} f(t)\, dt$ converge.

cf $\boxed{650.3}$ pour exemple d'intégrale convergente, non absolument convergente.

$(u_n)_n$ sommable $\iff$ $\sum u_n$ cv absolument

3.2 Intégrabilité d'une fonction

Définition. On dit que f est **intégrable sur** I lorsque f est continue par morceaux sur I et l'intégrale de f sur I est absolument convergente.

Remarque. *Lorsque l'on dit intégrable sur I, on parle donc d'une fonction, de l'intégrande d'une intégrale absolument convergente.*
Lorsque l'on dit absolument convergente, on parle d'une intégrale généralisée, dont l'intégrande est intégrable.
Pas de confusion : intégrable ne signifie pas que l'on peut simplement considérer l'intégrale de la fonction.
Pas de confusion : intégrable ne signifie pas primitivable.

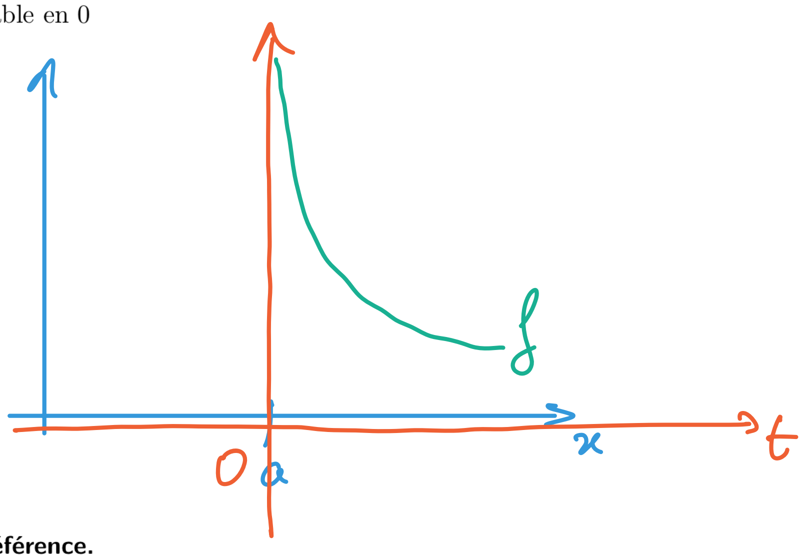
Notation. On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur I.

Proposition.

- Sur un segment $[a, b]$, une fonction continue est intégrable.
- Sur un intervalle $]a, b[$ borné, une fonction continue qui se prolonge par continuité en a et b est intégrable.

Remarque. *Si $I = [a, b[$, on dit que l'on étudie l'intégrabilité de f en b. L'intégrabilité de f continue (par morceaux) sur $I = [a, b[$ ne dépend en effet que du comportement local de f au voisinage de b.*

Proposition. La fonction f est intégrable en a (resp. en b) si et seulement si $t \mapsto f(a + t)$ (resp. $t \mapsto f(b - t)$) est intégrable en 0



Exemples de référence.

- $\ln$ est intégrable en 0 ;
- $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$;
- $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$;
- $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 0$.
- $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable en a si et seulement si $\alpha < 1$.

3.3 Techniques d'étude

Remarque. *Dans la pratique, pour justifier qu'une intégrale généralisée converge, on étudie sa convergence absolue en utilisant l'un des théorèmes de ce paragraphe. On identifie la (ou les) bornes de l'intervalle où l'intégrale est généralisée en précisant la continuité (par morceaux) de l'intégrande, et on se place sur un voisinage de cette borne (on fait deux études distinctes si l'intégrale est doublement généralisée). L'idée est de comparer l'intégrande à une fonction de référence, la comparaison devant être « raisonnable » sur ce voisinage.*
L'étude se fait donc sur l'intégrande, et non l'intégrale elle-même. C'est pour cette raison que les résultats sont énoncés en termes de fonctions intégrables.

Commençons par énoncer le théorème dans le cas où $I = [a, +\infty[$. On considère f, g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$.

Théorème.

> Si $|f| \leqslant |g|$ et g intégrable ~~sur $[a, +\infty[$~~ en $+\infty$, alors f est intégrable ~~sur $[a, +\infty[$~~ en $+\infty$.

Théorème.

> Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}(g(x))$ et g intégrable ~~sur $[a, +\infty[$~~ en $+\infty$, alors f est intégrable ~~sur $[a, +\infty[$~~ en $+\infty$.

Remarque. *Ce résultat s'utilise en particulier lorsque* $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(g(x))$.

Théorème.

> Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ et g intégrable ~~sur $[a, +\infty[$~~ en $+\infty$, alors f est intégrable ~~sur $[a, +\infty[$~~ en $+\infty$.

Proposition. Précisons aussi que, dans le cas où f et g sont telles que $0 \leqslant |f| \leqslant |g|$ et f non intégrable sur $[a, +\infty[$, alors g n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

Preuve : On suppose g intégrable en $+\infty$.

- On travaille sur les int. partielles.

$$\forall x > a, \quad \int_a^x |f(t)|\,dt \leq \int_a^x |g(t)|\,dt \leq \int_a^{+\infty} |g(t)|\,dt$$

indep de x

donc $x \longmapsto \int_a^x |f(t)|\,dt$ est une fct croissante, majorée, donc admet une limite finie. Donc $\int^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge, ie f intégrable en $+\infty$.

- Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(g(x))$

$\exists M>0, \exists A$ tq $\forall x \geq A \quad |f(x)| \leq M |g(x)|$

donc f intégrable en $+\infty$ par le point précédent.

- Si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$

  alors en particulier $f(x) = \underset{+\infty}{O}(g(x))$.

Exemple. Étudier l'intégrabilité sur un voisinage de $+\infty$ des fonctions suivantes :

$t \mapsto \dfrac{\cos t}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$

Au voisinage de $t \to +\infty$

$$\left|\frac{\cos t}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$$ intégrable en $+\infty$ $(2>1)$

donc $t \longmapsto \dfrac{\cos t}{1+t^2}$ intégrable en $+\infty$

M2 $$\frac{\cos t}{1+t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

et $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$.

$t \mapsto \dfrac{2t}{1+t^3}$ continue au voisinage de $+\infty$.

Au voi de $t \to +\infty$ $\quad \dfrac{2t}{1+t^3} \sim \dfrac{2t}{t^3}$

$= \dfrac{2}{t^2}$ intégrable en $+\infty$

$t \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ continue sur $[0,+\infty[$

Au vois de $t \to +\infty$

$e^{-\sqrt{t}}$ $\qquad e^{-\alpha t}$ ✗

$e^{-2\ln t} = \dfrac{1}{t^2}$ ✓

$$\left|e^{-\sqrt{t}}\right| \leq e^{-2\ln t}$$ car $2\ln t \leq \sqrt{t}$ au vois de $+\infty$

$= \dfrac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$.

$$t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{1+t}$$

$t \mapsto \dfrac{1}{t^2 \ln t}$ continue au vois de $+\infty$

Au vois. de $+\infty$:

$$\frac{1}{t^2 \ln t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$\frac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$

donc $t \mapsto \dfrac{1}{t^2 \ln t}$ intégrable en $+\infty$.

Énonçons maintenant le théorème dans le cas où $I =]0, b]$. On considère f, g deux fonctions continues par morceaux sur $]0, b]$.

Théorème.

Si $|f| \leqslant |g|$ et g intégrable sur $]0, b]$, alors f est intégrable sur $]0, b]$.

Théorème.

Si $f(x) \underset{x \to 0}{=} \mathrm{O}(g(x))$ et g intégrable sur $]0, b]$, alors f est intégrable sur $]0, b]$.

Théorème.

Si $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} g(x)$ et g intégrable sur $]0, b]$, alors f est intégrable sur $]0, b]$.

Exemple. Étudier l'intégrabilité sur un voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$t \mapsto \frac{\ln t}{1+t} \qquad t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} t}{t\sqrt{t}} \qquad t \mapsto \frac{1}{\sin t}$$

Au vois de 0 :

$\frac{\ln t}{1+t} \underset{0}{\sim} \ln t$ intégrable en 0

$\frac{\operatorname{Arctan} t}{t\sqrt{t}} \sim \frac{t}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$ intégrable en 0 $\left(\frac{1}{2} < 1\right)$

$\frac{1}{\sin t} \sim \frac{1}{t}$ non intégrable en 0

Remarque. *Les théorèmes précédents s'adaptent à tous les cas d'intervalles semi-ouverts. On préfèrera cependant commencer par effectuer un changement de variable pour ramener le problème en 0 ou en $+\infty$, là où on sait comparer les fonctions entre elles.*

Exemple. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}}\,\mathrm{d}t$.

Méthode. On peut aussi procéder, pour des exemples un peu plus délicats, par **éclatement** : pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée, on effectue un développement limité de son intégrande et on l'écrit comme somme de plusieurs termes, pour lesquels on étudie séparément la convergence de l'intégrale.

Exemple. Comment étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x}\,\mathrm{d}x$?

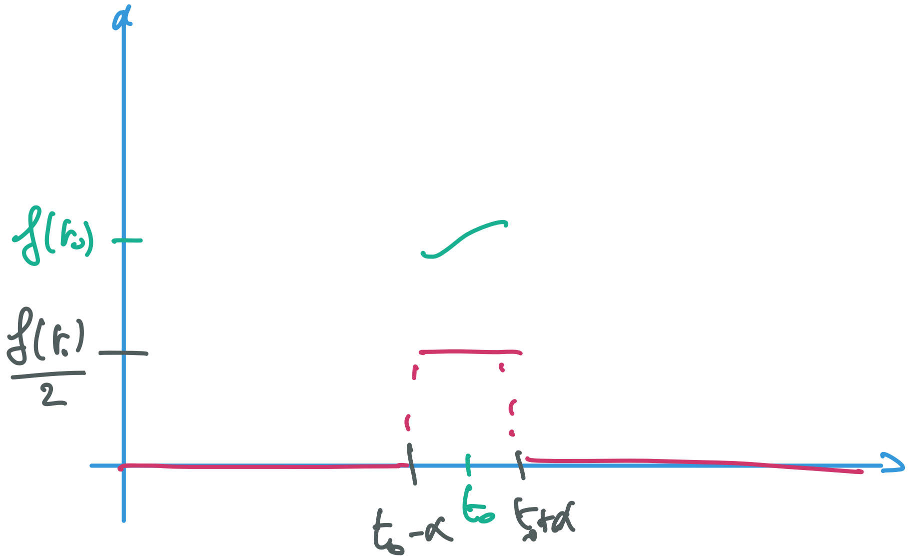
3.4 Cas des fonctions positives, continues et intégrables

Théorème.

Si f est positive, continue et intégrable, et $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle sur I.

Remarque.

- *L'hypothèse de continuité est importante ici.*
- *Ce théorème est souvent utilisé pour montrer le caractère « défini-positif » d'un produit scalaire défini par une intégrale.*
- *On fera référence à ce théorème en parlant de « fonction continue, positive, d'intégrale nulle ».*



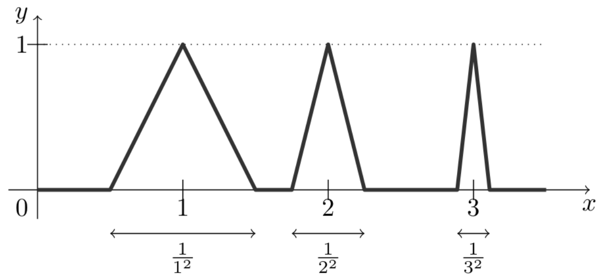
Si $\exists t_0$ $f(t_0)>0$ $\quad \displaystyle\int_I f(t)\,dt > 0$

4 Annexes

4.1 Annexe : une analogie trop séduisante avec les séries

Réfléchissons à la différence entre convergence et convergence absolue d'une intégrale généralisée, ainsi qu'à ces analogies avec les séries numériques, qui sont certes séduisantes, et auxquelles on pense tous. Voici deux exemples de fonctions définies par leur graphe :

1. Cette fonction est-elle intégrable ? A-t-elle une limite en $+\infty$?



2. Cette fonction est-elle intégrable ? Son intégrale sur $[0, +\infty[$ est-elle convergente ?