$\int_{\to 0}^{1} f(t)\,dt \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt \qquad \int^{\to +\infty} f(t)\,dt$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \sum u_n$

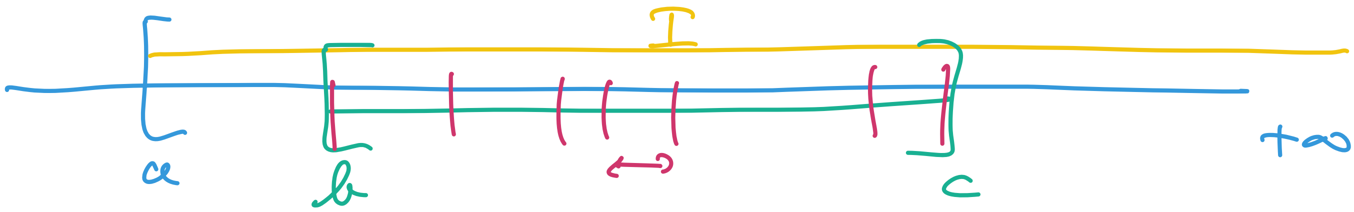
Intégration sur un intervalle quelconque

1 Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$

Dans cette section, a désigne un réel fixé.

1.1 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition. Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur I si et seulement si elle est continue par morceaux sur tout segment de I.



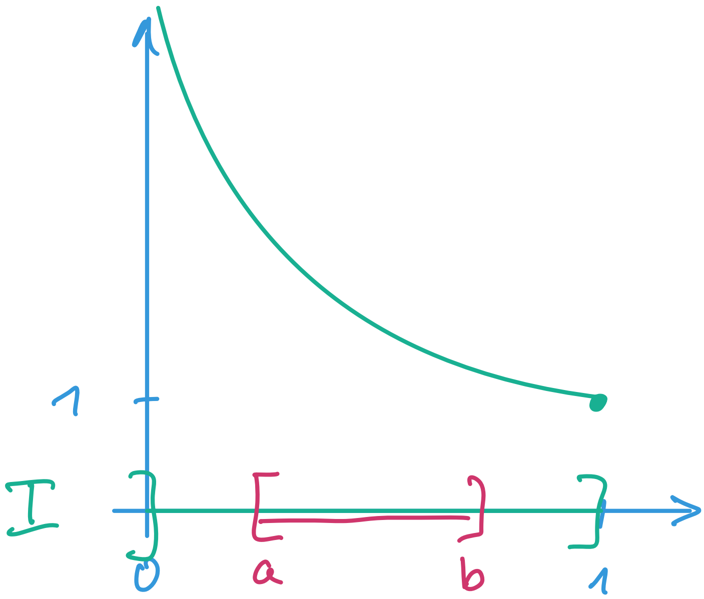
Exemple. Les fonctions suivantes sont-elles continues par morceaux sur l'intervalle $]0, 1]$?

$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$

$f_2 : x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$

$f_3 : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$

$f_4 : x \mapsto \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$



Soit $[a, b] \subset]0, 1]$

f_1 est continue (par mcx)

sur $[a, b]$

Donc f_1 est continue (par morceaux) sur $]0, 1]$

Proposition. Les fonctions continues sont continues par morceaux.

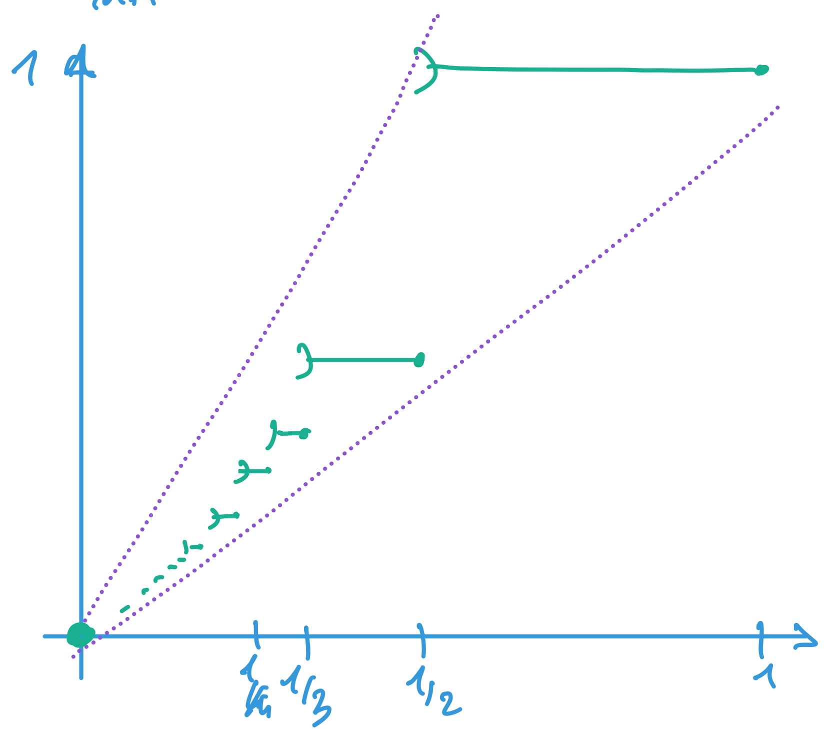
f_2 et f_3 sont continues par mcx sur $]0,1]$
car continues.

$$f_4(x) = \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor} \quad \text{sur }]0,1]$$

- Prolongeons f_4 de façon continue en 0.
- Représentons son graphe.

Si $n \leq \frac{1}{x} < n+1$, $f_4(x) = \frac{1}{n}$

ie $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$



$$\forall x > 0, \quad 0 \leq f_4(x) = \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$$

$$y-1 < \lfloor y \rfloor \leq y$$

$$< \frac{1}{\frac{1}{x} - 1}$$

$$= \frac{x}{1-x}$$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

donc f_n se prolonge de façon continue en 0

en posant $f_n(0) = 0$

Maintenant, f_n est définie sur le segment $[0,1]$, continue en 0. Est-elle continue par morceaux sur $[0,1]$?

<u>Non!</u>

f_n admet une infinité de points de discontinuité, donc ne peut admettre de subdivision (finie) adaptée.

f_n est-elle continue par morceaux sur $]0,1]$?

<u>Oui!</u>

Soit $[a, 1] \subset]0,1]$ $\quad \frac{1}{n+1} < a \leq \frac{1}{n}$

$$n \leq \frac{1}{a} < n+1$$

Posons $n = \lfloor \frac{1}{a} \rfloor$

Considérons la subdivision :

$$\left(a, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \dots, 1\right)$$

sur chaque $]x_k, x_{k+1}[$, f_n est constante

donc se prolonge de façon continue à $[x_k, x_{k+1}]$

Ainsi f_n est cpm sur $[a, 1]$.

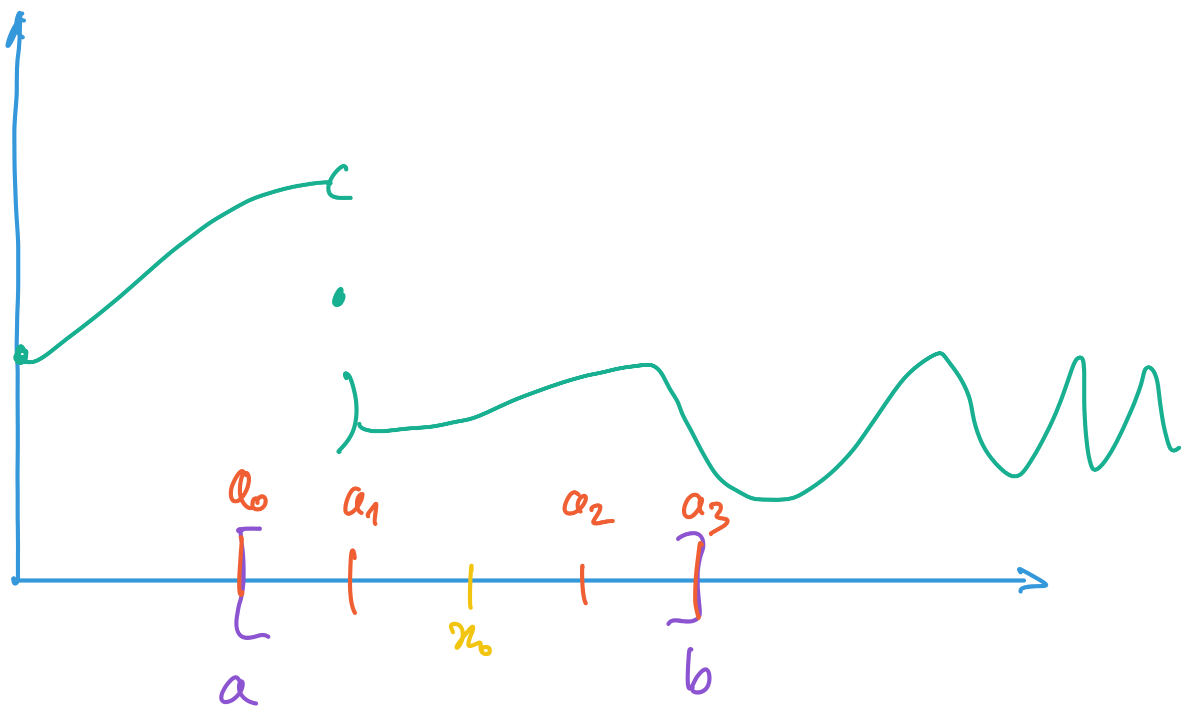
Proposition. Les fonctions continues sont continues par morceaux.

Proposition. Les fonctions continues par morceaux sont localement bornées, i.e. :

$$\forall x_0 \in I,\ \exists \eta > 0 \text{ t.q. } f_{|]x_0-\eta, x_0+\eta[} \text{ bornée}$$

ou encore :

$$\forall x_0 \in I,\ \exists \eta > 0,\ \exists M \geqslant 0 \text{ t.q. } \forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[,\ |f(x)| \leqslant M$$



$x_0 \in [a, b] \subset I$

f cpm sur $[a, b]$

$\exists\ \sigma = (a_0, \dots, a_n)$ adaptée à f sur $[a, b]$.

si $x_0 \in]a_k, a_{k+1}[$,

$f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ se prolonge de façon continue au segment $[a_k, a_{k+1}]$

$\longrightarrow$ th bornes atteintes

si $x_0 = a_k \in]a_{k-1}, a_{k+1}[$

$\longrightarrow$ 2 fois les bornes atteintes

$\sum u_n$ abstrait

$\sum_{k=0}^{n} u_k$ somme partielle

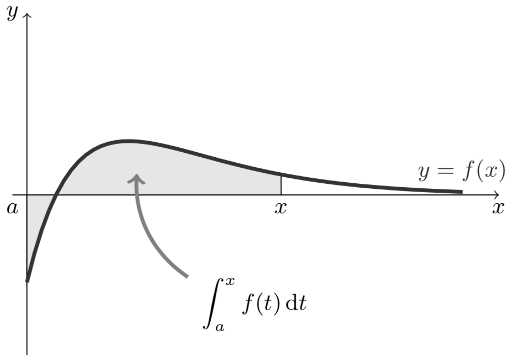
$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ somme

1.2 Intégrale convergente, intégrale divergente

Définition. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'**intégrale généralisée** :
$$\int_a^{\to +\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$
converge (ou existe) si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie ℓ lorsque $x \to +\infty$. Dans ce cas, on note :
$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \ell$$
On dit que l'intégrale généralisée **diverge** sinon.

Remarque. *L'intégrale* $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *pourrait être appelée « intégrale partielle » de l'intégrale généralisée.*

Interprétation géométrique :



Caractère local de la convergence. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. La convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\dots}^{\to +\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas du choix dans $[a, +\infty[$ de la borne d'en bas.

Remarque. *Ainsi, on peut dès maintenant retenir que la convergence d'une intégrale généralisée en $+\infty$ dépend seulement du comportement de l'intégrande au voisinage de $+\infty$.*

Preuve: Soit $b \in [a, +\infty[$

$$\forall x \quad \int_a^x f(t)\,dt = \underbrace{\int_a^b f(t)\,dt}_{cste} + \int_b^x f(t)\,dt$$

les deux intégrales partielles sont de même nature.

(admettent une limite finie ou non

en même temps)

donc $\displaystyle\int_a^{\to+\infty} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_b^{\to+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature

On peut parler de la cv de $\int^{+\infty} f(t)\,dt$

(La valeur de l'intégrale change)

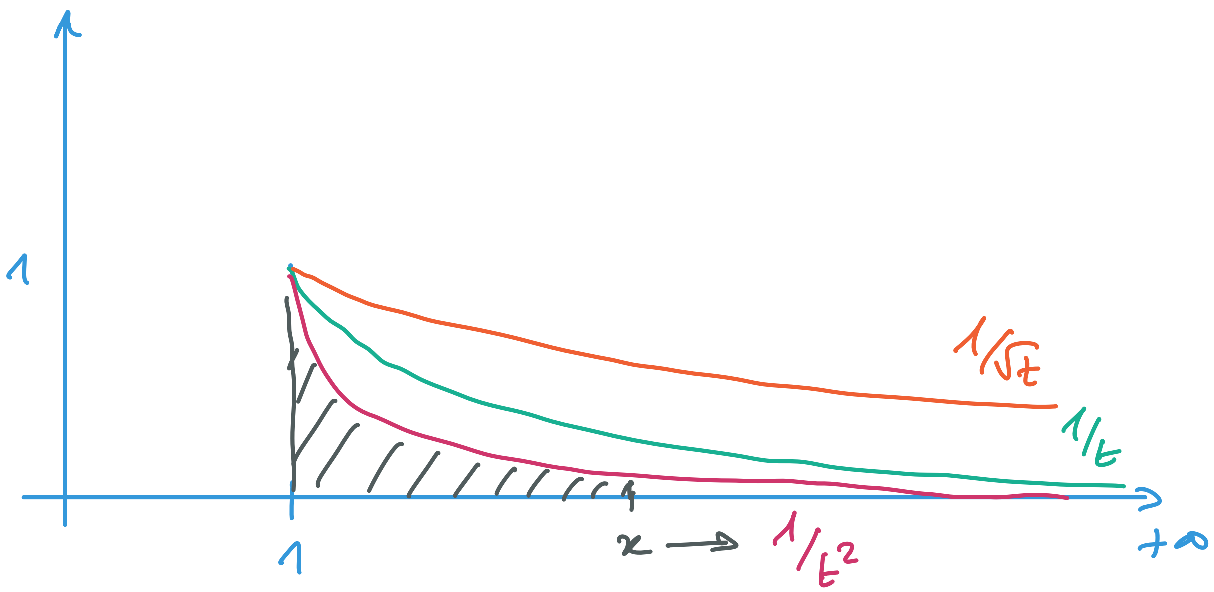
Exemple. Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\to+\infty} \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_{\mathrm{e}}^{\to+\infty} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\to+\infty} \cos t\,\mathrm{d}t$$

Remarque. *Les techniques d'étude de convergence seront étudiées un peu plus loin, et consisteront principalement à comparer l'intégrande à des fonctions de références. Pour les exemples qui précèdent, on travaille sur l'intégrale partielle, en revenant à la définition, ce qui ne sera pas le réflexe à avoir. Il s'agit en effet d'exemples (rares en pratique) où l'on peut exprimer une primitive de l'intégrande à l'aide des fonctions usuelles.*

Ici, parce qu'on n'a pas d'outils, on revient à la définition.



On travaille sur les intégrales partielles :

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x$$

$$= 1 - \frac{1}{x}$$

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

donc $\displaystyle\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est convergente

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = 1$

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \left[\ln t\right]_1^x$$

$$= \ln x$$

$$\xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

donc $\int_1^{\to +\infty} \frac{1}{t}\,dt$ diverge

<u>Pour $\alpha \neq 1$</u>

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \int_1^x t^{-\alpha}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}\right]_1^x$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right)$$

$$\begin{cases} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty & \text{si } \alpha < 1 \\ \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

<u>Théorème :</u> $\boxed{\int^{\to +\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \text{ converge ssi } \alpha > 1}$

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$

2.5.1 Calcul par primitivation de l'intégrande

Ce premier théorème est une conséquence directe de la définition.
Il s'applique lorsque l'on sait exprimer une primitive de l'intégrande.

Théorème.

Soit f continue par morceaux sur $]a, b[$, dont on connaît une primitive F.
L'intégrale $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F admet une limite finie ℓ_a en a à droite et une limite finie ℓ_b en b à gauche.
Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_{t \xrightarrow{>} a}^{t \xrightarrow{<} b} = \ell_b - \ell_a$$

Remarque. *La convergence de l'intégrale est justifiée a posteriori par l'existence de limites finies du « crochet ».*

Théorème:

Soit f cpm sur $[a, +\infty[$

On suppose connaître F primitive de f.

$\displaystyle\int_a^{\to+\infty} f(t)\,dt$ converge

ssi $\big[F(t)\big]_a^{t\to+\infty}$ a une limite finie

Dans ce cas:

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \big[F(t)\big]_a^{t\to+\infty}$$

Preuve: ben oui !

On passe par les intégrales partielles.

$$\int_a^x f(t)\,dt = \big[F(t)\big]_a^x$$

$$= F(x) - F(a)$$

Ben oui.

Rédigeons ainsi :

On calcule, sous réserve de limite finie du crochet :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{+\infty}$$

$$= 0 + 1$$

donc l'intégrale est cv et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = 1$.

Exemple. Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$	$\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$	① $\int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$	② $\int_0^{\to+\infty} \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$
$\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$	③ $\int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$	④ $\int_{\mathrm{e}}^{\to+\infty} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$	⑤ $\int_0^{\to+\infty} \cos t\,\mathrm{d}t$

① Sous réserve de limite finie du crochet :

$$\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{1+t}\,dt = \underbrace{\left[\ln(1+t)\right]_1^{\to+\infty}}_{\text{de limite } +\infty}$$

donc $\int^{\to+\infty} \frac{1}{1+t}\,dt$ diverge.

En vrai : $\frac{1}{1+t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$

pour laquelle, l'intégrale div en $+\infty$

donc $\int^{\to+\infty} \frac{1}{1+t}\,dt$ diverge

On suppose ~~$\alpha \neq 0$~~ $\alpha < 0$

Sous réserve de limite finie du crochet :

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\, dt = \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}\right]_0^{+\infty}$$

$$= 0 - \frac{1}{\alpha}$$

La limite est finie, donc l'intégrale est cv

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\, dt = -\frac{1}{\alpha}$

Si $\alpha > 0$

le crochet est de limite infinie

donc l'intégrale diverge

Si $\alpha = 0$

$$\int_0^{+\infty} 1\, dt = [t]_0^{+\infty}$$ de limite infinie

Théorème :

$$\boxed{\int^{+\infty} e^{\alpha t}\, dt \text{ converge} \iff \alpha < 0}$$

$\sum \alpha^n$ converge $\iff |\alpha| < 1$

Proposition. Lorsque f est à valeurs complexes, $\int_a^{\to+\infty} f$ converge si et seulement si $\int_a^{\to+\infty} \mathrm{Re}(f)$ et $\int_a^{\to+\infty} \mathrm{Im}(f)$ convergent.

Exemple. Étudier la convergence de $\int_0^{\to+\infty} \cos(\omega t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Étudions plutôt $\int_0^{\to+\infty} e^{i\omega t} e^{-t}\,dt$

Sous-réserve de limite finie du crochet :

$$\int_0^{\to+\infty} e^{(i\omega-1)t}\,dt = \left[\frac{1}{i\omega-1} e^{(i\omega-1)t}\right]_0^{\to+\infty}$$

$$= 0 - \frac{1}{i\omega-1}$$

$$\text{car } \left|e^{(i\omega-1)t}\right| = e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Donc l'intégrale cv et vaut $\dfrac{1}{1-i\omega} = \dfrac{1+i\omega}{1+\omega^2}$

Donc $\int_0^{\to+\infty} \cos(\omega t)\, e^{-t}\,dt$ converge

$$\text{et } \int_0^{+\infty} \cos(\omega t)\, e^{-t}\,dt = \frac{1}{1+\omega^2}$$

1.3 Cas des fonctions positives

Lemme. Dans le cas où l'intégrande est à valeurs positives, l'intégrale généralisée $\int_a^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

Remarque. *Lorsque f est positive, on autorise l'écriture $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$ en cas de divergence.*
Un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de la convergence de l'intégrale.

th de limite monotone:

si f est positive, l'intégrale partielle est $\nearrow$.

1.4 Primitive et intégrale généralisée

Proposition. Si f est continue sur $[a, +\infty[$, et que l'intégrale $\displaystyle\int^{\to +\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale fonction de la borne d'en bas :

$$x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable, de dérivée $x \mapsto -f(x)$.

Soit $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$

est dérivable de dérivée f (car f continue)

Soit $G(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$

$$= \int_a^{+\infty} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

donc $G'(x) = 0 - f(x)$