Pour mercredi 12 : 640.3, 640.4, 650.6

Pour lundi 10, 7h00 :

1 ex à rédiger parmi 260.21, 260.22, 260.23

ET 1 ex à rédiger parmi 630.9, 630.10, 640.21, 640.22

2.5 Intégration par parties, changement de variable

18. Qu'appelle-t-on « intégration par parties » ?

19. Comment faire un changement de variable pour le calcul d'une intégrale ?

Méthode de calcul.

$$\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

"par parties"

↗ symbolise la primitivation

↘ ——— dérivation

$$= \Big[f(t) \quad G(t) \Big]_a^b - \int_a^b f'(t) \quad G(t) \quad dt$$

la partie primitivée

ce qui est au bout des flèches

Hypothèses : à ne pas vérifier pour les fct usuelles.

à vérifier si le contexte le justifie

(par ex une fonction prolongée, à priori n'est pas $\mathcal{C}^1$)

les fcts du haut sont $\mathcal{C}^1$: G, f

Changement de variable :

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

on pose $t = \varphi(u)$

$dt = \varphi'(u)\, du$

t varie de a à b

↳ u varie de α à β

$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\, \varphi'(u)\, du$$

pas de vérifier d'hypothèses pour les chgt "usuels".

Hyp : $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ (ou $[\beta, \alpha]$)..

φ bijection $\mathcal{C}^1$,

strictement croissante / strictement décr.

Ex : $$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt$$

$t = \sin u$

$dt = \cos u\, du$

2.6 Primitives usuelles

20. Donner une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\operatorname{Arcsin} x$ $\qquad$ $\operatorname{Arcsin} x + \frac{\pi}{2}$

$-\operatorname{Arccos} x$

21. Donner une primitive de $\ln x$.

$x \ln x - x$ (par primitivation par parties)

22. Donner une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$.

$\operatorname{Arctan} x$

23. Donner une primitive de $\frac{1}{1-x^2}$.

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$

où $a = \left[(1-x).F(x)\right](1) = \frac{1}{2}$

$b = \left[(1+x)F(x)\right](-1) = \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$$

donc une primitive est : $-\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x|$

$$= \ln \sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}$$

24. Donner une primitive de $\dfrac{1}{1+x+x^2}$.

mettre le dénom sous forme canonique

$$\int \frac{1}{1+x+x^2}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$$

on pose $x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t$

$dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dt$

$$= \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left[t^2+1\right]}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan} t \quad + \text{cste}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) \quad + \text{cste}$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$+$ cste

2.7 Formules de Taylor

25. Qu'est-ce que le polynôme de Taylor d'une fonction ?

Soit f $\mathcal{C}^n$ sur I intervalle contenant 0.

Polynôme de Taylor de f d'ordre n :

$$T_n(f)(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

<u>Remarque</u> : on travaille toujours en 0, quitte à travailler avec $g(h) = f(a+h)$

<u>Formule de Taylor</u>

$\hookrightarrow$ contrôle de la différence entre

$f(x)$ et $T_n(f)(x)$

Théorème

26. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.

27. Comment démontrer la formule précédente ?

Soit f $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I contenant 0.

$\forall x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

$(x-t)$ décroît de x à 0 $\quad$ t croît de 0 à x

Preuve : par réc sur n.

On suppose f $\mathcal{C}^{n+2}$.

Par HR $\quad f(x) = T_n(f)(x) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$

par parties

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\left[(-)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_0^x}_{0 + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0)} - \int_0^x (-) \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt$$

Théorème

28. Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Soit f $\mathcal{C}^{n+1}$ tq $f^{(n+1)}$ bornée sur I

I contient 0.

$$\left| f(x) - T_n(f)(x) \right| \leq \| f^{(n+1)} \|_\infty \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Preuve: f $\mathcal{C}^{n+1}$ donc peut appliquer la formule de Taylor reste intégral

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \right|$$

1er cas: si $x > 0$

$$\leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \left| f^{(n+1)}(t) \right| dt$$

$$\leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \| f^{(n+1)} \|_\infty \, dt$$

$$= \| f^{(n+1)} \|_\infty \left[\frac{(-)(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x$$

$$= \| f^{(n+1)} \|_\infty \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\underline{2^e \text{ cas}}$: si $x < 0$

$$|f(x) - T_n(f)(x)| = \left| -\int_x^0 \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_x^0 \frac{|x-t|^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)|\,dt$$

$$\leq \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} \|f^{(n+1)}\|_\infty\,dt$$

$$= \|f^{(n+1)}\|_\infty \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_x^0$$

$$= \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$