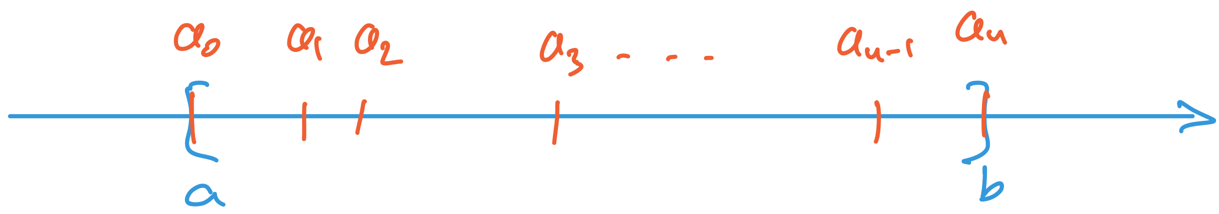
Intégration sur un segment des fonctions numériques

Je me souviens — l'intégrale comme un nombre

1.1 Fonctions continues par morceaux

1. Qu'est-ce qu'une **subdivision** du segment $[a, b]$?
2. Qu'est-ce qu'une fonction **continue par morceaux** sur $[a, b]$?



une subd. de $[a,b]$ est $\sigma = (a_0, a_1, \dots a_n)$

tq : $a = a_0 < a_1 < a_2 \dots < a_n = b$

On aime les subdivisions à pas constant :

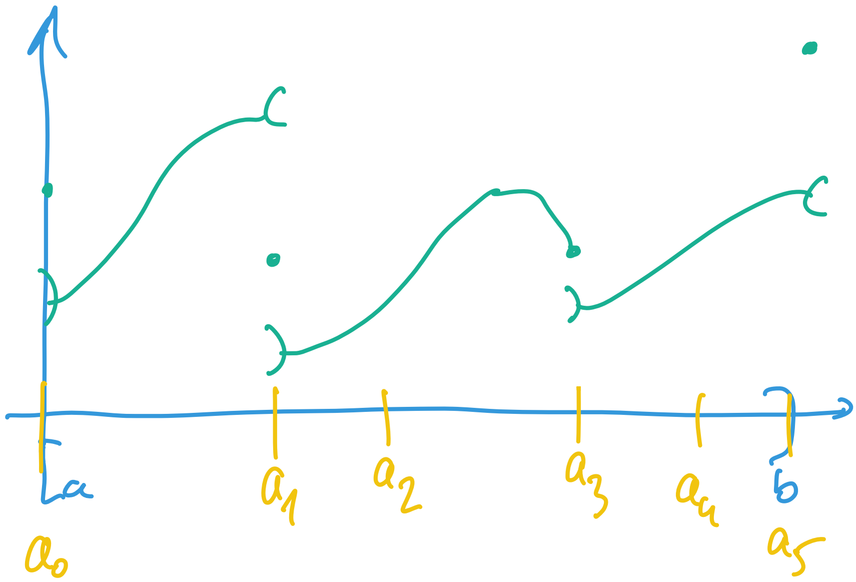
$$a_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

pas de la subdivision

f est c.p.m sur $[a,b]$

$\Longleftrightarrow \exists \sigma = (a_0, \dots, a_n)$ subd de $[a,b]$ tq
appelée adaptée

$f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ se prolonge à $[a_k, a_{k+1}]$ en une fct continue.



$f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ est continue

f admet une limite finie à droite et à gauche en chaque a_k.

3. Que dire d'une combinaison linéaire de deux fonctions continues par morceaux ? d'un produit de deux fonctions continues par morceaux ?

4. Prêt à le démontrer ?

5. Est-ce que l'ensemble $\mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ possède une structure particulière ?

Si f, g cpm sur $[a,b]$,

$\lambda f + \mu g$ et fg aussi

5 $\mathbb{K}$-algèbre

1.2 Intégrale d'une fonctions cpm sur un segment

6. Quel est le lien entre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$?

7. Énoncer la relation de Chasles.

8. Qu'est-ce que la linéarité de l'intégrale ?

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$$

Si $a < b$, on note aussi $\int_{[a,b]} f(t)\,dt$

Éviter d'avoir les bornes "à l'envers".

$a, b, c \in I$ où f cpm sur I

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$$

Si f, g continues (par morceaux) sur $I = [a, b]$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Alors $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$

9. Qu'est-ce que la positivité de l'intégrale ? la croissance de l'intégrale ?

10. Qu'est-ce que l'inégalité triangulaire pour les intégrales ?

(9) Si $\forall t \in [a,b] \quad f(t) \geq 0$ $\qquad \cancel{f' \geq 0}$

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$ où $a<b$

Si $\forall t \in [a,b] \quad f(t) \leq g(t)$

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$ où $a<b$

(10) Si f continue (par morceaux) sur $[a,b]$

Alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$ où $a<b$

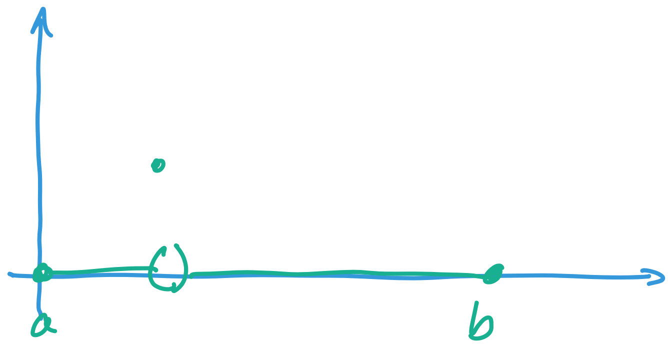
11. Que dire face à une intégrale nulle d'une fonction positive? et continue

Si f continue ~~par morceaux~~ sur $[a, b]$

$$\forall t \in [a, b] \quad f(t) \geq 0$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = 0$$

Alors $\forall t \in [a, b] \quad f(t) = 0$



Autre version:

Si f continue sur $[a, b]$

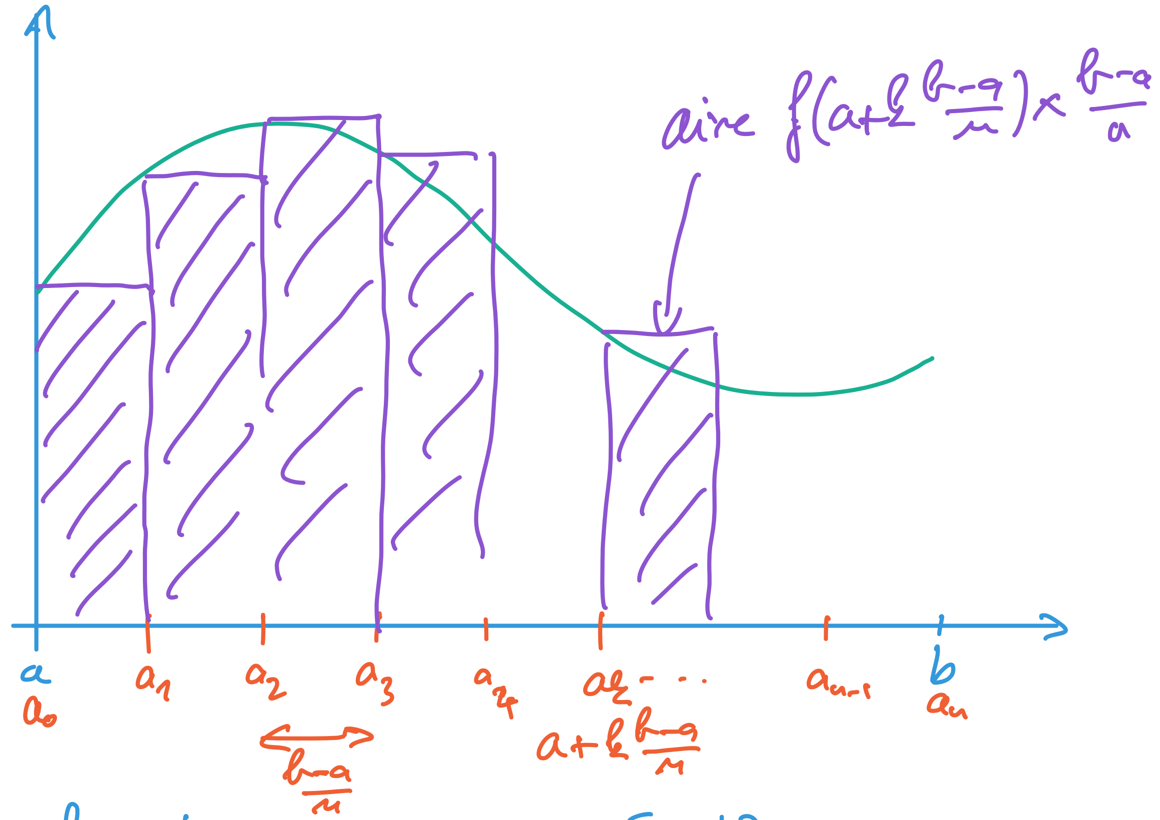
$$\forall t \in [a, b] \quad f(t) \geq 0$$

$$\exists t_0 \in [a, b] \quad f(t_0) > 0$$

Alors $\int_a^b f(t)\,dt > 0$.

1.3 Sommes de Riemann

12. Que dit le théorème sur les sommes de Riemann ?



Soit f continue par mcx sur $[a,b]$

On note

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\times\frac{b-a}{n}$$

Alors $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt$

Rmq : On peut aussi choisir $S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$

Utilité :
- Calcule de limites de sommes où apparaît $\frac{k}{n}$
- Approximer des intégrales "méthode des rectangles".

Je me souviens — l'intégrale comme une fonction de la borne d'en haut

2.4 Intégrale et primitive

13. Qu'appelle-t-on **primitive** d'une fonction f ?

14. Quelle est la classe des primitives de fonctions continues ?

15. Que dire de deux primitives d'une même fonction sur un intervalle ?

Une primitive de f est une fonction F dérivable, tq $F' = f$.

Si f est continue et que F est une primitive de f alors F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Si F et G sont 2 primitives de f sur I où I intervalle, alors :

$\exists K \in \mathbb{K}$ tq $\forall t \in I \quad F(t) = G(t) + K.$

$\forall t \in I, \; (F-G)'(t) = f(t) - f(t) = 0$

16. Énoncer le théorème fondamental, qui fait le lien entre intégrale et primitive.

17. Si f est continue, comment dériver $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$?

Si f est continue par morceaux

Si F est une primitive de f sur $[a,b]$

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b$$
$$= F(b) - F(a)$$

Soit f continue sur $[a,b]$.

Alors : $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f.

intégrale fct de la borne d'en haut.

Si f est continue sur $[a,b]$

alors $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable (et même C^1)

et sa dérivée est $x \mapsto f(x)$

Remarque : Si f cpm sur $[a,b]$

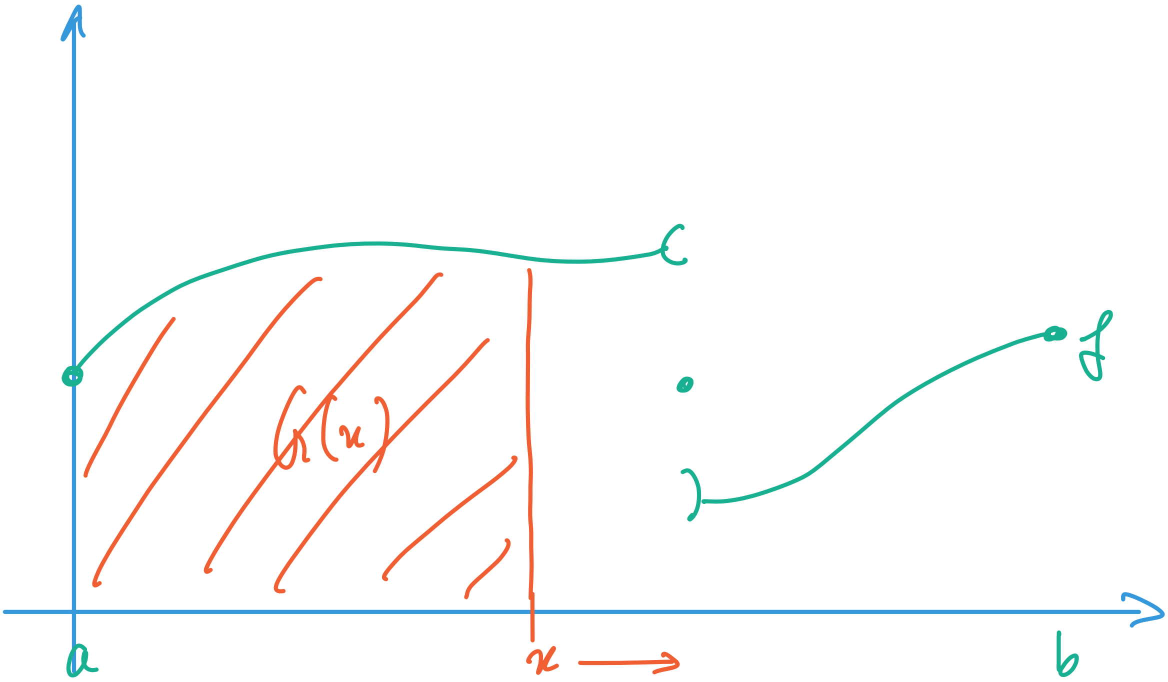
$G : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable à droite

et à gauche en tout point

et $\begin{cases} G'_d(x) = \lim\limits_{\substack{t \to x \\ >}} f(t) \\ G'_g(x) = \lim\limits_{\substack{t \to x \\ <}} f(t) \end{cases}$

(ces limites existent par déf de la continuité par morceaux)

En revanche, G est continue en tout point.



$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$F : y \mapsto \int_a^y f(t)\,dt$ dérivable car f continue

Si f est continue, comment dériver $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$?

si u, v dérivables,

$$\varphi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = \int_a^{v(x)} f(t)\,dt - \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$$

$$= F(v(x)) - F(u(x))$$

par dérivation des fct composées :

$$\varphi'(x) = v'(x)\, f(v(x)) - u'(x)\, f(u(x))$$

2.5 Intégration par parties, changement de variable

18. Qu'appelle-t-on « intégration par parties » ?

19. Comment faire un changement de variable pour le calcul d'une intégrale ?

Méthode de calcul.

$$\int_a^b$$

2.6 Primitives usuelles

20. Donner une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

21. Donner une primitive de $\ln x$.

22. Donner une primitive de $\dfrac{1}{1+x^2}$.

23. Donner une primitive de $\dfrac{1}{1-x^2}$.

24. Donner une primitive de $\dfrac{1}{1+x+x^2}$.

2.7 Formules de Taylor

25. Qu'est-ce que le polynôme de Taylor d'une fonction ?

26. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.

27. Comment démontrer la formule précédente ?

28. Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.