Pour ve : 630.1, 630.2, 640.2

Dérivation des fonctions numériques

I intervalle de $\mathbb{R}$

0.1 Dérivée

1. Comment définir la dérivée en a de $f : I \to \mathbb{K}$.

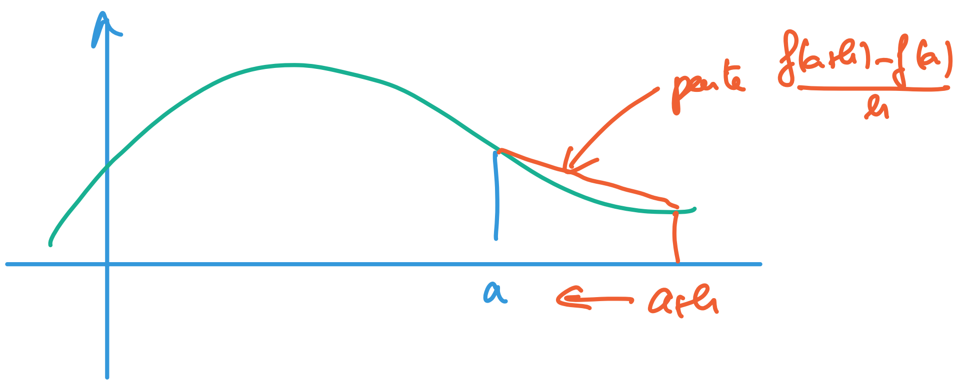
3. Une ~~autre définition~~ caractérisation de la dérivée ?

Définition :

f dérivable en a $\iff$ $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie pour $x \to a$

Dans ce cas, on note $f'(a)$ la limite

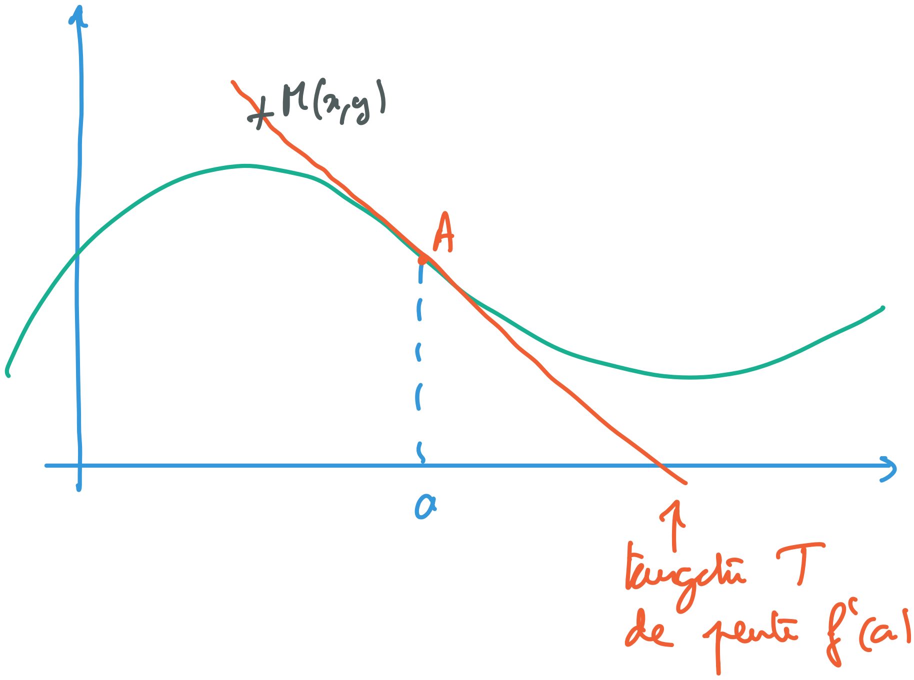
Remq : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{}$



C'est équivalent à : f admet un $DL_1(a)$ c'est mieux !!

$$f(a+h) = f(a) + \underset{\text{c'est } f'(a)}{\ell} \cdot h + \underset{h\to 0}{o}(h)$$

2. Équation de la tangente ?



$$M(x,y) \in T \iff y - f(a) = f'(a)\,(x-a)$$

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

taux d'accr.

4. Dérivée à droite ? à gauche ? —

5. Lien entre dérivabilité et continuité ?

Si f est dérivable en a

alors f est continue en a

Exemple : $|.|$ est continue en 0

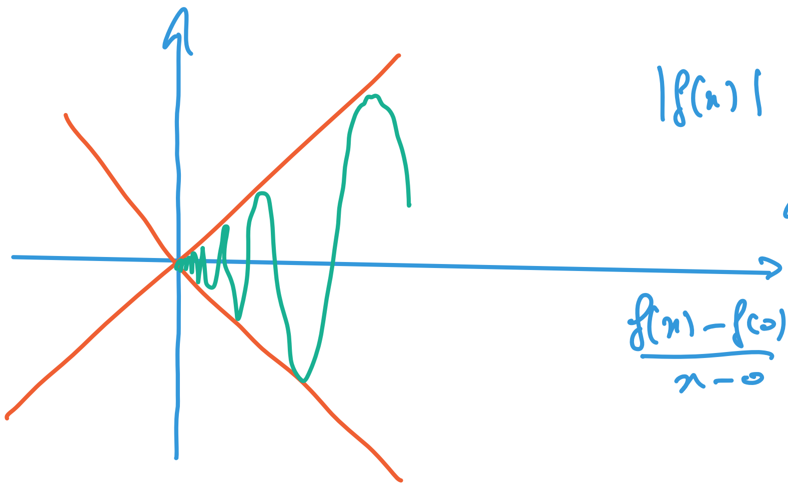
non dérivable en 0

(dérivable à droite et à gauche)

$\sqrt{}$ est continue en 0

non dérivable en 0 (tangente verticale)

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



$$|f(x)| \leq |x| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc f est continue en 0

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x} \quad \text{pas de limite en } 0$$

6. Dérivée des fonctions $I \to \mathbb{C}$?

7. Quelle est la dérivée de $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$?

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ $\qquad$ I intervalle de $\mathbb{R}$

f dérivable en a $\iff$ taux d'accroissement a une limite finie

$\iff$ $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a

$$\frac{d}{dt} e^{(1+i)t} = (1+i)\, e^{(1+i)t}$$

Rq : $e^{(1+i)t} = e^{t} \cdot (\cos t + i \sin t)$

Rmq : $e^{(1+i)t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((1+i)t)^n}{n!}$

$\downarrow \frac{d}{dt}$

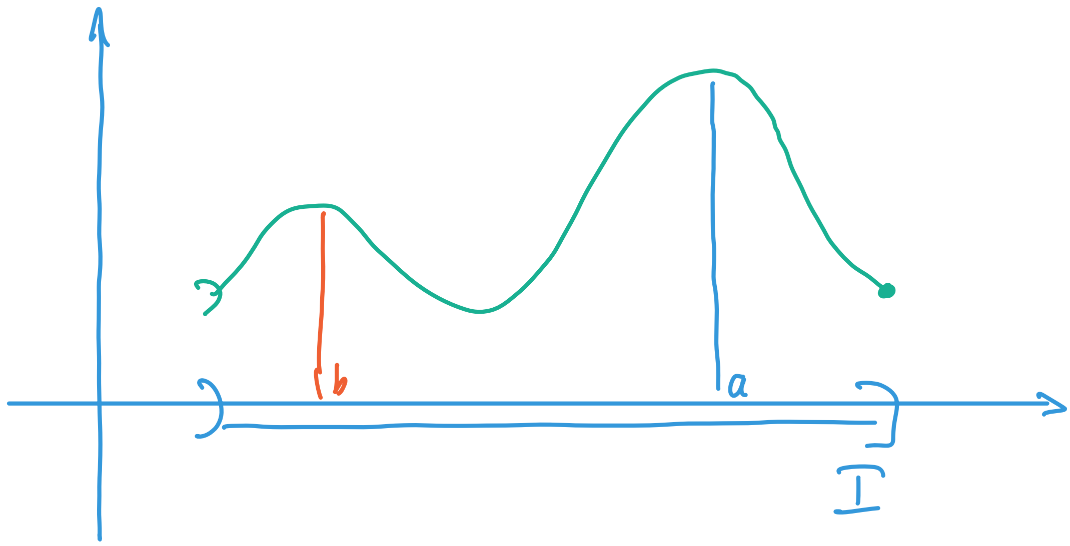
Th classe C^1 des séries de fct.

0.2 Théorème de Rolle

On ne parle ici que de fonctions réelles.

8. Pour $f : I \to \mathbb{R}$, définir « f admet un maximum global en a ».

9. Pour $f : I \to \mathbb{R}$, définir « f admet un maximum local en a ».



f admet un max global en a

$\iff \forall t \in I,\ f(t) \leq f(a)$

f admet un max (local) en b

$\iff \exists \eta > 0$ tq $\forall t \in \,]b-\eta, b+\eta[\, \cap I \quad f(t) \leq f(b)$

10. Énoncer le théorème faisant le lien entre extremum local et annulation de la dérivée.

11. Énoncer le théorème de Rolle.

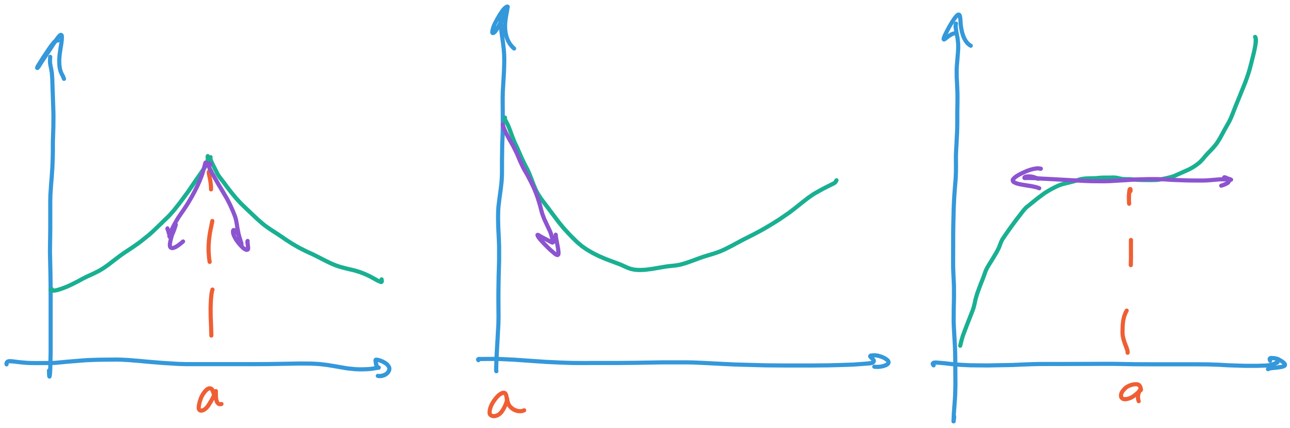
Théorème : Soit $f : I \to \mathbb{R}$

Si f admet un extremum en a

f dérivable (en a)

a n'est pas une extrémité de I

alors $f'(a) = 0$

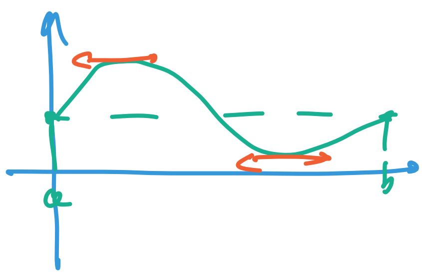


Th de Rolle :

Soit f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$

Si $f(a) = f(b)$,

alors $\exists\, c \in\,]a,b[$ tq $f'(c) = 0$



Rmq : souvent, on l'utilise plusieurs fois.

0.3 Accroissements finis

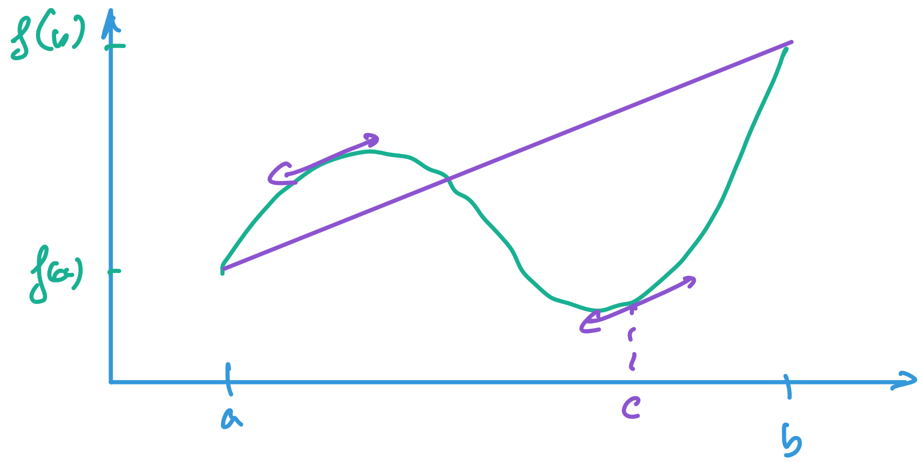
12. Quelle est l'égalité des accroissements finis ?

13. Quelle est l'inégalité des accroissements finis ?

14. Il y a un lien avec le théorème fondamental de l'analyse ?

Th Si f est cont sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

alors $\exists c \in]a,b[$ tq $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Th Si f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$

Si $\cancel{|f'| \leq K}$ $\forall t \in$ $|f'(t)| \leq K$

alors $\left| f(b)-f(a) \right| \leq K |b-a|$

$\forall x,y \in [a,b]$ $\quad |f(x)-f(y)| \leq K |x-y|$

Corollaire Si f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$

$\forall x,y \in [a,b]$ $\quad |f(x)-f(y)| \leq \|f'\|_\infty^{[a,b]} |x-y|$

existe car f' continue sur $[a,b]$ segment

Objectif : majorer $|f(b)-f(a)|$ à l'aide de $(b-a)$

Si f' continue (ie f $\mathcal{C}^1$)

$a<b$

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt$$

donc
$$|f(b)-f(a)| = \left| \int_a^b f'(t)\,dt \right|$$
$$\leq \int_a^b |f'(t)|\,dt$$
$$\leq \int_a^b \|f'\|_\infty$$
$$= (b-a)\,\|f'\|_\infty$$

15. À quelle condition f dérivable est-elle constante ?

16. À quelle condition f dérivable à valeurs réelles est-elle croissante ?

17. À quelle condition f dérivable à valeurs réelles est-elle strictement croissante ?

(15) Si f dérivable sur I

$f'(t) = 0 \ \forall t \in I$

I intervalle

alors f constante sur I

(16) Si f dérivable sur I

$f'(t) \geqslant 0 \ \forall t \in I$

I intervalle

alors f croissante sur I

$\forall x, y \in I$

$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

(17) Soit f dérivable sur I intervalle

On a

f strictement croissante sur I

$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(t) \geqslant 0 \ \forall t \in I \\ \{t \text{ tq } f'(t) = 0\} \text{ ne contient aucun intervalle non réduit à un point.} \end{cases}$

$\Leftarrow \ f'(t) > 0 \ \forall t$

0.4 Opérations sur les fonctions dérivables

18. $(\lambda f + \mu g)'(x) =$

19. $(f \times g)'(x) =$

20. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) =$

21. $(g \circ f)'(x) =$

22. $(f^{-1})'(x) =$

f bij

0.5 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

23. Définir « f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I »

24. Définir « f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I », où $k \in \mathbb{K}$.

25. Définir « f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I »

26. $(\lambda f + \mu g)^{(k)}(x) =$

f $\mathcal{C}^1$ sur I signifie $\begin{cases} (f \text{ continue sur } I) \\ f \text{ dérivable sur } I \\ f' \text{ continue sur } I \end{cases}$

Par réc :

f est $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I

signifie : $\begin{cases} f \text{ est } \mathcal{C}^k \\ f^{(k)} \text{ est dérivable} \\ f^{(k)'} \text{ est continue} \end{cases}$

notée $f^{(k+1)}$

f est $\mathcal{C}^\infty$ signifie f $\mathcal{C}^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$

27. Énoncer la formule de Leibniz.

28. Comment démontrer la formule de Leibniz ?

29. Pour $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^k$ et $\phi : J \to I$ de classe $\mathcal{C}^k$, que dire de $f \circ \phi$?

$\boxed{27}$ **Théorème**

Si f, g sont $\mathcal{C}^k$ sur I

alors $f \times g$ est $\mathcal{C}^k$ sur I et

$$(f \times g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$$

Preuve : par récurrence.

Pour l'hérédité, on utilise la relation de Pascal :

$$\binom{k}{i} = \binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i}$$

29. Pour $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^k$ et $\phi : J \to I$ de classe $\mathcal{C}^k$, que dire de $f \circ \phi$?

$$J \xrightarrow{\phi} I \xrightarrow{f} \mathbb{K}$$

Si ϕ et f sont $\mathcal{C}^k$, $f \circ \phi$ est $\mathcal{C}^k$

⚠ pas de formule l'exprimant.

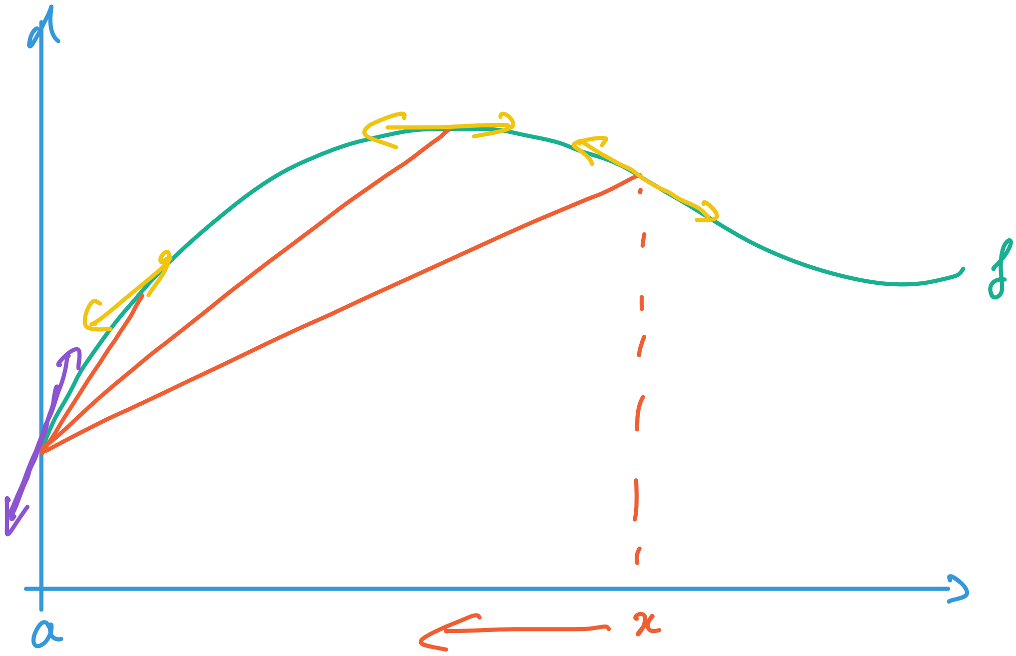
Exercice : le démontrer par récurrence.

à réfléchir. (cf Leibniz)

0.6 Limite de la dérivée

30. Énoncer le théorème limite de la dérivée.

31. Comment utiliser le résultat précédent pour prolonger à I de façon $\mathcal{C}^1$ une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$?



$$f'(a) \xleftarrow[x \to a]{?} f'(x)$$

Th : Si f dérivable sur $]a, b]$

f continue sur $[a, b]$

$f'(x)$ a une limite finie en a à droite

Alors f dérivable en a à droite

et $f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ >}]{} f'_d(a)$

Remarque : On suppose que f est définie et continue en a

f' est automatiquement continue en a.

ie ce théorème ne peut pas s'appliquer à une fct dérivable et non $\mathcal{C}^1$.

<u>En pratique</u>:

<u>Si</u> f est $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$

f est continue en a

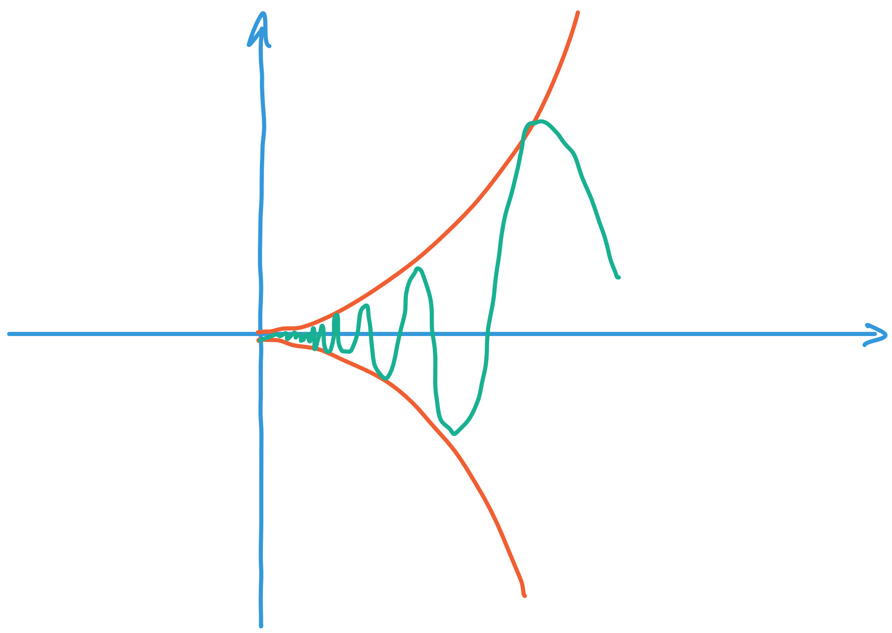
$f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

<u>Alors</u> f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

⚠ il ne s'agit pas d'un prolongement de la dérivée. On étudie la dérivabilité de f en a.

<u>Exemple</u>: fonction dérivable, mais pas $\mathcal{C}^1$.

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



Mque f est dérivable en 0 :

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \left|x \sin \frac{1}{x}\right|$$
$$\leq |x|$$
$$\xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

donc f dérivable en 0 et $f'(0)=0$

Mque f n'est pas $\mathcal{C}^1$ (ie f' n'est pas continue)

$\forall x \neq 0$ $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos \frac{1}{x}$

$$= \underbrace{2x \sin \frac{1}{x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} - \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\text{n'a pas de limite quand } x\to 0}$$

donc f' n'a pas de limite en 0.