Pour j.c.: 260.12, 260.32

A trigonalisable $\Leftrightarrow$ χ_A scindé
$\Leftrightarrow$ π_A scindé
$\Leftrightarrow$ $\exists P$ annulateur de A scindé

En particulier Toute matrice est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \qquad \sum vp = tr(A)$$

5 Nilpotence

5.1 Endomorphisme nilpotent, indice de nilpotence

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est **nilpotent** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$u^k = 0$$

Dans ce cas, le plus petit entier k satisfaisant cette propriété s'appelle l'**indice de niplotence** de u.

Remarque. *Ainsi, si u est nilpotent d'indice m, on a :*

$$u^m = 0 \quad \textit{et} \quad u^{m-1} \neq 0$$

5.2 Polynôme minimal, polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

- u est nilpotent $\iff \chi_u = X^n$
- u est nilpotent d'indice $m \iff \pi_u = X^m$

Corollaire. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice m. Alors :

$$m \leqslant n$$

Preuve: u nilpotent $\Leftrightarrow$ $\chi_u = X^n$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose u nilpotent, donc $\exists k$ tq $u^k = 0$

donc X^k est annulateur de u.

donc $Sp(u) \subset \{$racines de $X^4\} = \{0\}$

Donc χ_u a pour seule racine 0.

χ_u est unitaire, de degré n, donc $\chi_u = X^n$.

$\boxed{\Leftarrow}$ par le th de Cayley-Hamilton,

χ_u annule u donc $u^n = 0$.

u est nilpotent d'indice $m \iff \Pi_u = X^m$

Preuve: $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $u^m = 0$ et $u^{m-1} \neq 0$

donc X^m annule u

donc $\Pi_u \mid X^m$

or $u^{m-1} \neq 0$ donc $\Pi_u = X^m$

$\boxed{\Leftarrow}$ Π_u annule de u donc $u^m = 0$

et les pol. de deg $\leq m-1$ n'annulent pas u

donc $u^{m-1} \neq 0$.

Conséquence: Si u nilpotent, son indice de nilpotence est $\leq n = \dim E$.

Preuve: $\underset{\overset{\shortparallel}{m}}{\deg \Pi_u} \leq \deg \chi_u = n$

5.3 Nilpotence et trigonalisabilité d'un endomorphisme

Théorème.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable et a 0 pour seule valeur propre.

Preuve: $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose u nilpotent

donc $\chi_u = X^n$ scindé

donc u trigonalisable

et $Sp(u) = \{\text{racines de } \chi_u\} = \{0\}$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose u trigonalisable et $Sp(u) = \{0\}$

Donc $\exists \mathcal{B}$ base de E tq

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$$

Rmq: $\text{Mat}(u^2, \mathcal{B}) = \text{Mat}(u, \mathcal{B})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$\text{Mat}(u^3, \mathcal{B}) = \dots$

Notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

$\forall k \quad u(e_k) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$

$u^i(e_k) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-i})$

$u^k(e_k) = 0$

donc $u^n(e_k) = 0 \ \forall k$ donc u nilpotent.

5.4 Traduction matricielle des résultats précédents

Définition. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **nilpotente** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$A^k = 0$$

Dans ce cas, le plus petit entier k satisfaisant cette propriété s'appelle l'**indice de niplotence** de A.

Remarque. *Ainsi, si A est nilpotent d'indice m, on a :*

$$A^m = 0 \quad \textit{et} \quad A^{m-1} \neq 0$$

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- A est nilpotent $\iff \chi_A = X^n$
- A est nilpotent d'indice $m \iff \pi_A = X^m$

Corollaire. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice m. Alors :

$$m \leqslant n$$

Théorème.

$\boxed{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ est nilpotente si et seulement si elle est trigonalisable et a } 0 \text{ pour seule valeur propre.}}$

Corollaire. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

Exemple. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour unique valeur propre réelle 0, et pourtant n'est pas nilpotente.

Remarque. *Une matrice nilpotente n'est pas toujours triangulaire. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente.*

A

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & 1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$$

dév C_1

$= X(X^2+1)$ non scindé sur $\mathbb{R}$

0 est sa seule racine (réelle)

$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$

Pourtant χ_A non scindé dans $\mathbb{R}[X]$, donc A non trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Rmq : Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $\chi_A = X(X-i)(X+i)$ scindé simple

donc A diagonalisable.

Parfois $E_\lambda(u)$ est "trop petit" de dim $< m(\lambda)$

6 Sous-espaces caractéristiques

6.1 Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si λ est une valeur propre de u, de multiplicité m_λ, on appelle **sous-espace caractéristique de u associé à λ** l'espace :

$$N_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}\right)$$

Proposition. Avec les notations de la définition ; en supposant χ_u scindé

- $E_\lambda(u) \subset N_\lambda(u)$
- $N_\lambda(u)$ est stable par u
- $N_\lambda(u)$ est de dimension m_λ
- En notant u_λ l'endomorphisme induit par u sur $N_\lambda(u)$, on a $\chi_{u_\lambda} = (X - \lambda)^{m_\lambda}$.

Rmq: $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2)$

si $u(x) = 0$ alors $u^2(x) = 0$

$$\underbrace{\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)}_{= E_\lambda(u)} \subset \underbrace{\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}}_{= N_\lambda(u)}$$

Preuve:

- vu ci-avant
- $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}$ est un polynôme de u, donc commute avec u, donc $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}$ est stable par u.

On peut définir l'endomorphisme induit

$$u_\lambda : \begin{array}{ccc} N_\lambda(u) & \longrightarrow & N_\lambda(u) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

- $\chi_{u_\lambda} \mid \chi_u$ où $\chi_u = (X-\lambda)^{m_\lambda} Q$

où $Q(\lambda) \neq 0$

(par déf de mul (multiplicité de λ)

$\forall x \in N_\lambda(u), \quad (u - \lambda Id_E)^{m_\lambda}(x) = 0$

(par déf de $N_\lambda(u)$)

donc $\quad (u_\lambda - \lambda Id_E)^{m_\lambda}(x) = 0$

donc $\quad (X-\lambda)^{m_\lambda}$ est annulateur de u_λ

donc λ est la seule vp de u_λ

et donc $\quad \underline{\chi_{u_\lambda} = (X-\lambda)^{\dim N_\lambda(u)}}$

or $\quad \chi_{u_\lambda} \mid \chi_u$

ie $\quad (X-\lambda)^{\dim N_\lambda(u)} \mid (X-\lambda)^{m_\lambda} Q$

où $Q(\lambda) \neq 0$

donc $\quad \underline{\dim N_\lambda(u) \leq m_\lambda}$

• $\chi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)^{m_\lambda}$ car χ_u scindé

les $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ sont premiers entre eux, donc

par lemme des noyaux :

$$\underset{\substack{\| \\ E \\ \text{(Cayley-Hamilton)}}}{\operatorname{Ker}(\chi_u(u))} = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} \underbrace{\operatorname{Ker}(u-\lambda Id_E)^{m_\lambda}}_{N_\lambda(u)}$$

donc $\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(N_\lambda(u)) = n$

$= \sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda$

car χ_u scindé.

Ainsi $\sum_{\lambda \in Sp(u)} \left(m_\lambda - \dim N_\lambda(u)\right) = 0$

Somme nulle de termes ≥ 0, donc chaque terme

est nul : $\underline{\forall \lambda \quad \dim N_\lambda(u) = m_\lambda}$.

et donc $\chi_{u_\lambda} = (X-\lambda)^{m_\lambda}$

Rmq : On a aussi montré : $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} N_\lambda(u)$

si χ_u scindé.

en base adaptée, $\operatorname{Mat}(u) = \begin{pmatrix} ? & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & ? \end{pmatrix}$

(par stabilité de $N_\lambda(u)$ par u)

chaque bloc diagonal est matrice de u_λ.

Théorème.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose χ_u scindé. Alors :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} N_\lambda(u)$$

De plus, en notant :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où les valeurs propres λ_i sont deux à deux distinctes, et les multiplicités m_i sont dans $\mathbb{N}^*$, il existe une base de E dans laquelle u est représentée par la matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_1 \end{matrix} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \begin{matrix} \lambda_r & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Preuve : $N_{\lambda_i}(u)$ stable par u, $\dim N_{\lambda_i}(u) = m_i$

et $\chi_{u_{\lambda_i}} = (X - \lambda_i)^{m_i}$

donc u_{λ_i} trigonalisable :

$\exists \mathcal{B}_i$ base de $N_{\lambda_i}(u)$ tq

$$\mathrm{Mat}(u_{\lambda_i}, \mathcal{B}_i) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_i \end{pmatrix}}_{m_i}$$

On note $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r)$ concaténation,

adaptée à $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_{\lambda_i}(u)$

$$\mathrm{Mat}(u,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}(u_1,\mathcal{B}_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mathrm{Mat}(u_r,\mathcal{B}_r) \end{pmatrix}$$

diag par blocs, car les $N_{\lambda_i}(u)$ stables par u.

$$= \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & * \\ (0) & \lambda_1 \end{matrix} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \begin{matrix} \lambda_r & * \\ (0) & \lambda_r \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Ici, chaque bloc diagonal s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i I_{m_i} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilpotente}}$$

Théorème.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose χ_u scindé. Alors :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} N_\lambda(u)$$

De plus, en notant :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où les valeurs propres λ_i sont deux à deux distinctes, et les multiplicités m_i sont dans $\mathbb{N}^*$ dans toute base de E adaptée à $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_{\lambda_i}(u)$, u est représentée par la matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} + R_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r I_{m_r} + R_r \end{pmatrix}$$

où les matrices R_i sont nilpotentes.

Preuve : Soit $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r)$ base adaptée à $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_{\lambda_i}(u)$.

Chaque $N_{\lambda_i}(u)$ est stable par u, donc

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$$

est diagonale par blocs

où $A_i = \mathrm{Mat}(u_{\lambda_i}, \mathcal{B}_i) \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{K})$

or $\chi_{u_{\lambda_i}} = (X - \lambda_i)^{m_i} = \chi_{A_i}$

est annulateur de A_i par le th de Cayley-Hamilton, donc

$$(A_i - \lambda_i I_{m_i})^{m_i} = 0$$

On note $R_i = A_i - \lambda_i I_{m_i}$.

On a : $A_i = \lambda_i I_{m_i} + R_i$

et $R_i^{m_i} = 0$ donc R_i nilpotente.

(R_i n'est peut-être pas triangulaire)

Remarque :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r I_{m_r} \end{pmatrix}}_{\substack{D \\ \text{diagonale}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} R_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & R_r \end{pmatrix}}_{\substack{N \\ \text{nilpotente}}}$$

et $DN = ND$

6.2 Sous-espaces caractéristiques d'une matrice carrée

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si λ est une valeur propre de A, de multiplicité m_λ, on appelle **sous-espace caractéristique de A associé à λ** l'espace :

$$N_\lambda(A) = \operatorname{Ker}\left((A - \lambda I_n)^{m_\lambda}\right)$$

Proposition. Avec les notations de la définition :

- $E_\lambda(A) \subset N_\lambda(A)$
- $N_\lambda(A)$ est de dimension m_λ

Théorème.

par ex si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose χ_A scindé. Alors :

$$\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} N_\lambda(A)$$

De plus, en notant :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où les valeurs propres λ_i sont deux à deux distinctes, et les multiplicités m_i sont dans $\mathbb{N}^*$, la matrice A est semblable à une matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} + R_1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_r I_{m_r} + R_r \end{pmatrix}$$

où les matrices R_i sont triangulaires supérieures strictes.

(ou R_i nilpotentes)