Pour me : 260.20, 260.26, 260.27

$u \in \mathcal{L}(E)$ E est de dim finie

u diagonalisable $\iff \exists B$ base de E tq $\mathrm{Mat}(u, B)$ diag

$\iff \exists B$ base de vecteurs propres de u

$\iff E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

$\iff n = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u)$

$\iff \chi_u$ scindé et $\forall \lambda \in Sp(u)$

$\dim E_\lambda(u) = m_\lambda$

Th spectral

χ_u scindé simple

$\iff \Pi_u$ scindé simple

$\iff \Pi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$

$\iff \exists P$ scindé simple annulateur de u.

Lemme des noyaux

Si $P_1 \wedge P_2 = 1$

alors alors $\mathrm{Ker}\,(P_1 P_2)(u) = \mathrm{Ker}\, P_1(u) \oplus \mathrm{Ker}\, P_2(u)$

en part. si $P_1 P_2$ annulateur de u.

Th de Cayley-Hamilton

χ_u est annulateur de u

Si P annulateur de u

Alors $Sp(u) \subset \{$ racines de $P\}$

4 Trigonalisabilité

4.1 Trigonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **trigonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ soit triangulaire supérieure.

Théorème.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\begin{aligned} u \text{ est trigonalisable} &\iff \text{il existe un polynôme annulateur scindé} \\ &\iff \chi_u \text{ est scindé} \\ &\iff \pi_u \text{ est scindé} \end{aligned}$$

$$\mathrm{Mat}(u,\mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

triangulaire sup (diagonale) $\iff \forall k \in \{1, \dots, n\}$ $u(e_k) \in \mathrm{Vect}(e_1 \dots e_k)$ ($u(e_k) \in \mathrm{Vect}(e_k)$)

$$\iff \begin{cases} u(e_1) \in \mathrm{Vect}(e_1) \\ u(e_2) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \\ u(e_3) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) \\ \vdots \end{cases}$$

($u(e_2) \in \mathrm{Vect}(e_2)$, $\vdots$)

Preuve du théorème :

u trigonalisable $\iff$ $\cancel{\pi_u}$ χ_u scindé

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose u trigonalisable ie

$\exists \mathcal{B}$ base de E tq $\mathrm{Mat}(u,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \leftarrow T$

Alors : $\chi_u = \chi_T$

$$= \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i) \quad \text{car } T \text{ triangulaire}$$

scindé.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\cancel{\chi_u}$ $\cancel{\pi_u}$ scindé.

On cherche $\mathcal{B}$ base tq $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \cdots * \\ (0) & \ddots \;\; \lambda_n \end{pmatrix}$

$u(e_1) = \lambda_1 e_1$, $u(e_2) = * e_1 + \lambda_2 e_2 \; \ldots$

e_1 vecteur propre de u.

Raisonnons par récurrence sur $n = \dim E$.

- Si $n = 1$, $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = (\lambda)$ est triangulaire sup. pour toute base $\mathcal{B}$.

- Soit $n \geq 1$, on suppose que pour tout ev E de dim n, si $u \in \mathcal{L}(E)$ est tq χ_u est scindé, alors u est trigonalisable.

Soit E de dim $n+1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tq χ_u scindé.

Comme χ_u est scindé, $\exists \lambda_1$ vp de u et e_1 vecteur propre associé.

On complète e_1 en $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ base de E. On a :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & B \\ \begin{matrix} 0 \\ | \\ 0 \end{matrix} & C \end{pmatrix}$$

On note p le projecteur sur $F = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$ de direction $\mathrm{Vect}(e_1)$. Alors $p \circ u \in \mathcal{L}(E)$ et laisse stable l'espace F.

On note v l'endomorphisme induit par $p \circ u$ sur F

$$v : F \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto p \circ u\,(x)$$

$$\mathrm{Mat}(v, (e_2, \dots, e_{n+1})) = C$$ (s'en convaincre)

On peut appliquer l'HR à $v \in \mathcal{L}(F)$ où F est de dimension n :

Montrons pour cela que χ_v est scindé :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

donc $\chi_u = (X - \lambda_1)\chi_C$ calcul de dét par blocs.

donc χ_C est scindé
$\chi_C = \chi_v$

Par HR, il existe $(e_2', \dots, e_{n+1}')$ base de F tq $\mathrm{Mat}(v, (e_2', \dots, e_{n+1}'))$ triang. supérieure

Notons $\mathcal{E} = (e_1, e'_2, \dots, e'_{n+1})$

$$\mathrm{Mat}(u,\mathcal{E}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e'_2) & & u(e'_{n+1}) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & \alpha_2 & \alpha_k & \alpha_{n+1} \\ \hline 0 & * & * & * \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & * & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right) & \begin{array}{c} e_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_k \\ \vdots \\ e'_{n+1} \end{array} \end{array}$$

car $u(e_1) = \lambda_1 e_1$

et $u(e'_k) = \underbrace{\alpha_k e_1}_{\in \mathrm{Vect}(e_1)} + \underbrace{p \circ u(e'_k)}_{\in F}$

(déc. de $u(e'_k)$ selon $\mathrm{Vect}(e_1) \oplus F$)

$= \alpha_k e_1 + \mathrm{cl}(e'_2, \dots, e'_k)$

car la matrice de v dans $(e'_2, \dots, e'_{n+1})$ est triang. supérieure

$\in \mathrm{Vect}(e_1, e'_2, \dots, e'_k)$

donc $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{E})$ est triangulaire supérieure.

On a montré : u trigonalisable $\Leftrightarrow$ χ_u scindé.

χ_u et Π_u ont les mêmes racines

$\Leftrightarrow$ Π_u scindé

Π_u engendre l'idéal des annulateurs de u

$\Leftrightarrow$ $\exists P$ annulateur scindé.

A et B semblables $\iff$ A, B représentent le même endomorphisme dans des bases différentes

$\iff \exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq

$A = PBP^{-1}$

A et B équivalentes $\iff \exists P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$

$A = PBQ^{-1}$

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est trigonalisable, i.e. si χ_u est scindé, alors la trace est la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité) et le déterminant est le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité) :

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} m(\lambda)\lambda \text{ et } \det(u) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \lambda^{m(\lambda)}$$

Approche 1 :

$\exists \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E tq

$$\operatorname{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

les vp, racines de χ_u, répétées selon la multiplicité

donc $\det(u) = \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n$

$\operatorname{tr}(u) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

Approche 2 :

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les vp distinctes

$m_1 \ldots m_p$ les multiplicités

Si u trigonalisable, $\exists \mathcal{B}$ base de E tq

$$\mathrm{Mat}(u,\mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{matrix} \overbrace{\hphantom{\lambda_1 \ddots \lambda_1}}^{m_1} & \overbrace{\hphantom{\lambda_2 \ddots \lambda_2}}^{m_2} & & \overbrace{\hphantom{\lambda_p \ddots \lambda_p}}^{m_p} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & \ddots \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix} & & & * \\ & \begin{matrix} \lambda_2 & \ddots \\ 0 & \lambda_2 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \begin{matrix} \lambda_p & \ddots \\ 0 & \lambda_p \end{matrix} \end{pmatrix} \end{array}$$

donc $\mathrm{tr}(u) = m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \ldots + m_p \lambda_p$

$\det(u) = \lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_p^{m_p}$.

4.2 Trigonalisabilité d'une matrice carrée

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **trigonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure :

$$\exists T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ triangulaire supérieure}, \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ A = PTP^{-1}$$

~~s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ soit triangulaire supérieure~~.

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ est trigonalisable} &\iff \text{il existe un polynôme annulateur scindé} \\ &\iff \chi_A \text{ est scindé} \\ &\iff \pi_A \text{ est scindé} \end{aligned}$$

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est trigonalisable, i.e. si χ_A est scindé, alors la trace est la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité) et le déterminant est le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité) :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m(\lambda)\lambda \text{ et } \det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^{m(\lambda)}$$

Exemple. Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite $(u_n)_n$ vérifiant :

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 11\, u_{n+2} - 39\, u_{n+1} + 45\, u_n$$

On note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ $\qquad U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix}$

$$(u_n)_n \text{ vérifie } (E) \iff \forall n \quad U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ 11 u_{n+2} - 39 u_{n+1} + 45 u_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \forall n \quad U_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 45 & -39 & 11 \end{pmatrix}}_{A} U_n$$

$$\iff \forall n \quad U_n = A^n U_0$$

Calculer A^n

Commençons par réduire A

diagonaliser ou trigonaliser.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -45 & 39 & X-11 \end{vmatrix} \qquad \text{dév } L_3$$

$$= (X-11)\,X^2 - 39\,(-X) - 45 \cdot 1$$

$$= X^3 - 11X^2 + 39X - 45$$

on cherche des racines entières diviseurs de -45

$$= (X-3)(X^2 - 8X + 15)$$

$$= (X-3)^2(X-5)$$

donc $Sp(A) = \{3, 5\}$ et 3 vp double.

Recherche des espaces propres:

$$E_5(A) = \operatorname{Ker}(A - 5I_3)$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 45 & -39 & 6 \end{pmatrix} \qquad C_1 + 5C_2 + 25C_3 = 0$$

$$= \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$E_3(A) = \operatorname{Ker}(A - 3I_3)$$

car C_1, C_2 libre

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 45 & -39 & 8 \end{pmatrix} \leftarrow \text{de rang} \geq 2$$

$\leq 2 \leftarrow$ vp

$C_1 + 3C_2 + 9C_3 = 0$

$$= \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\dim E_3(A) < m(3)$$

donc **A non diagonalisable.**

indic

$(A - 3I_3)^2$

χ_A scindé donc **A trigonalisable.**

Calculons $(A-3I_3)^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 45 & -39 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 45 & -39 & 8 \end{pmatrix}$

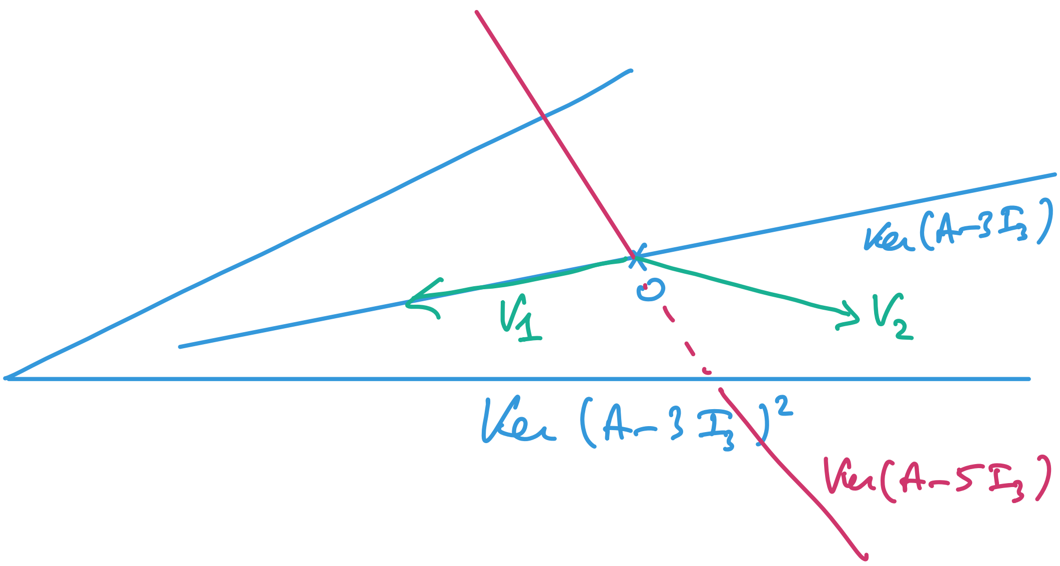
$$= \begin{pmatrix} 9 & -6 & 1 \\ 45 & -30 & 5 \\ 9\times 25 & -150 & 25 \end{pmatrix} \quad \text{rang } 1$$

$C_1 = 9C_3 \qquad C_2 = -6C_3$

On peut noter $N_3(A) = \operatorname{Ker}(A-3I_3)^2$

de dim 2

$$\underbrace{\operatorname{Ker}(A-3I_3)}_{\substack{E_3(A) \\ \text{trop petit}}} \subset \underbrace{\operatorname{Ker}(A-3I_3)^2}_{\substack{N_3(A) \\ \text{de dim } 2}}$$



Soit $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-3I_3)^2 \setminus \mathrm{Ker}(A-3I_3)$

ou alors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$

Soit $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-3I_3)$

Soit $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-5I_3)$

- <u>Mq (V_1, V_2, V_3) base de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{K})$</u>

  * $V_1, V_2 \in N_3(A)$, non colinéaires donc

    (V_1, V_2) base de $N_3(A)$

  * V_3 base de $E_5(A)$

Par le th de Cayley-Hamilton

$$(A-3I_3)^2(A-5I_3) = 0$$

Par le lemme des noyaux, comme $(X-3)^2 \wedge (X-5) = 1$

$$\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(A-3I_3)^2 \oplus \mathrm{Ker}(A-5I_3)$$

donc par concaténation des bases,

$$(V_1, V_2, V_3) \text{ base de } \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$$

On note $a \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}))$ endom canoniquement associé à A. On cherche

$$\mathrm{Mat}(a, (V_1, V_2, V_3)) = \begin{array}{cccc} a(V_1) & a(V_2) & a(V_3) & \\ \multicolumn{3}{c}{\left(\begin{array}{cc|c} 3 & \lambda & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right)} & \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} E_5(A) \text{ stable par } a \\ N_3(A) \text{ stable par } a \end{array}\right\}$ car $(A-3I_3)^2$ et $(A-5I_3)$ commutent avec A

$AV_3 = 5V_3$ car $V_3 \in \mathrm{Ker}(A-5I_3)$

$AV_1 = 3V_1$ car $V_1 \in \mathrm{Ker}(A-3I_3)$

$V_2 \in \mathrm{Ker}(A-3I_3)^2$

donc $(A-3I_3)V_2 \in \mathrm{Ker}(A-3I_3) = \mathrm{Vect}(V_1)$

ie $AV_2 = 3V_2 + \lambda V_1$

$$(A-3I_3)V_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 45 & -39 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 1 . V_1$$

donc $AV_2 = V_1 + 3V_2$

$$\mathrm{Mat}(a,(V_1,V_2,V_3)) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right) = T$$

Avec $P = \left(V_1 \middle| V_2 \middle| V_3 \right) = P_{\mathrm{can} \to (V_1,V_2,V_3)}$

On a $\quad A = P\,T\,P^{-1}$

Ouf ! on peut calculer $A^n = P\,T^n\,P^{-1}$

$$T = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{B} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

donc $\quad T^n = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{B^n} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 5^n \end{array}\right)$

où $\quad B^n = (3I_2 + J)^n \qquad$ où $\quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3I_2)^{n-k} J^k$$ par le binôme, avec $3I_2, J$ commutent

$$= 3^n I_2 + n.3^{n-1} J$$

$$= \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Donc $A^n = P \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1}$

donc $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 9 & 6 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 9 & 6 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha 3^n + \beta n 3^{n-1} \\ \beta 3^n \\ \gamma 5^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha 3^n + \beta n 3^{n-1} + \gamma 5^n \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

donc $\exists \alpha, \beta, \gamma$ tq $\forall n$ $u_n = \alpha 3^n + \beta n 3^{n-1} + \gamma 5^n$