Pendant les vacances :

Exercice à rédiger

pour le lu 27 octobre 7h00

au choix : 260.21 - 260.23

250.10 - 250.11

130.15 - 130.12

TIPE

$$P(u) : E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto (P(u))(x) = a_0 x + a_1 u(x) + a_2 u^2(x) + \dots$$

$\uparrow$ $u \circ u$

lemme des noyaux

3 Polynômes annulateurs et réduction

3.1 Une CNS de diagonalisabilité

Théorème.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\begin{aligned} u \text{ est diagonalisable } &\iff \text{il existe un polynôme annulateur de } u \text{ scindé à racines simples} \\ &\iff \pi_u \text{ est scindé à racines simples} \end{aligned}$$

Proposition. On peut donc aussi écrire :

$$u \text{ est diagonalisable } \iff \pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$$

Exemple. Un projecteur, une symétrie sont diagonalisables.

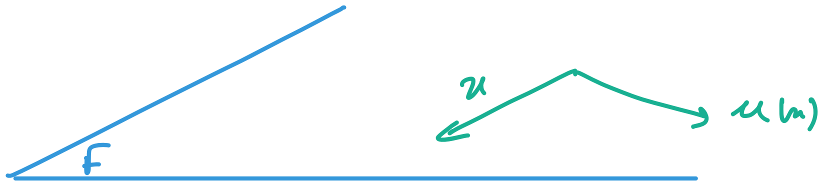
(χ_u scindé simple $\Rightarrow$ u diagonalisable)

3.2 Sous-espaces stables

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est stable par u, et on note u_F l'endomorphisme induit par u sur F. Alors :

$$\chi_{u_F} \mid \chi_u \quad \text{et} \quad \pi_{u_F} \mid \pi_u$$

E $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $u \in \mathcal{L}(E)$



F stable par u. On peut définir l'endom induit

$$u_F : F \longrightarrow F, \quad x \longmapsto u(x)$$

- En base adaptée, $\overbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)}^{A} = \begin{pmatrix} \overbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_F)}^{B} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$

$$\chi_u(X) = \det \begin{pmatrix} XI_r - B & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$= \chi_{u_F}(X) \times *$$

donc $\chi_{u_F} \mid \chi_u$

• On a aussi $\Pi_{u_F} \mid \Pi_u$

En effet : Mq Π_u est annulateur de u_F :

$\forall x \in F$

$$\Pi_u(u_F)(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k u_F^k(x)$$

où $\Pi_u = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$

$$= \sum_{k=0}^{d} a_k u^k(x)$$

car, pour $x \in F$,

$u_F(x) = u(x)$

$$= \Pi_u(u)(x)$$

$$= 0_{\mathcal{L}(E)}(x)$$

$$= 0_E$$

donc Π_u annule u_F, donc $\Pi_{u_F} \mid \Pi_u$.

Proposition. Avec les notations précédentes, si u est diagonalisable, alors u_F est diagonalisable.

Preuve : Si u diagonalisable,

Π_u scindé simple

donc Π_{u_F} scindé simple car $\Pi_{u_F} \mid \Pi_u$

donc u_F diagonalisable.

Diagonalisation simultanée

$\boxed{\textbf{240.5}}$

Dans une espace vectoriel E de dimension finie, on considère deux endomorphismes u et v diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

(a) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u.

(b) Montrer que l'endomorphisme induit de u à un sous-espace propre de v est diagonalisable.

(c) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u et v.

À savoir rédiger

3.3 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème de Cayley-Hamilton.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors χ_u est annulateur de u.

cf 7.2

Corollaire. Si E est de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$:

- $\pi_u \mid \chi_u$
- $\deg(\pi_u) \leqslant n$

$$\chi_u \in \underbrace{\pi_u \mathbb{K}[X]}$$

idéal des annulateurs de u.

Rmq : Pour déterminer π_u, on peut calculer χ_u et chercher π_u parmi les diviseurs de χ_u.

Rmq : Pour déterminer χ_u, on peut déterminer π_u et chercher parmi les multiples.

Conséquences :

$$\mathrm{Sp}(u) = \{ \text{racines de } \chi_u \}$$

$$= \{ \text{racines de } \pi_u \}$$

χ_u et π_u ont les mêmes racines (mais pas même multiplicité)

3.4 Traduction matricielle des résultats précédents

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ est diagonalisable} &\iff \text{il existe un polynôme annulateur de } A \text{ scindé à racines simples} \\ &\iff \pi_A \text{ est scindé à racines simples} \\ &\iff \pi_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda) \end{aligned}$$

Exemple. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^q = I_n$ pour un $q \in \mathbb{N}^*$. Justifier que A est diagonalisable.

Théorème de Cayley-Hamilton.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors χ_A est annulateur de A.

Corollaire.

- $\pi_A \mid \chi_A$
- $\deg(\pi_A) \leqslant n$

$X^q - 1$ est annulateur de A

or $X^q - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$

donc A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\prod_{k=0}^{q-1} (X - \omega^k) \quad \text{où} \quad \omega = e^{i\frac{2\pi}{q}}$$