Pour vendredi : 250.6 260.3
250.8

Réduction des endomorphismes et des matrices

Je me souviens

1. Que signifie : « F est stable par u » ?
2. Que peut-on définir lorsque F est stable par u ? Comment cela se traduit matriciellement ?

$u : E \longrightarrow E$ linéaire

F sous-ev de E

(1) $\forall x \in F,\ u(x) \in F$

(2) Si $\mathcal{B}$ base de E adaptée à F $\quad \mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{E})$ ← base de F

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{A}^{\dim F} & \overset{u(e_k)}{B} \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\ \dim F \\ \\ \end{array}$$

On peut définir l'endom. induit par u sur F

$$u_F : F \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto u(x)$$

$$\mathrm{Mat}(u_F, \mathcal{B}_F) = A$$

1 Polynômes annulateurs et valeurs propres

1.1 Cas des endomorphismes

Proposition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

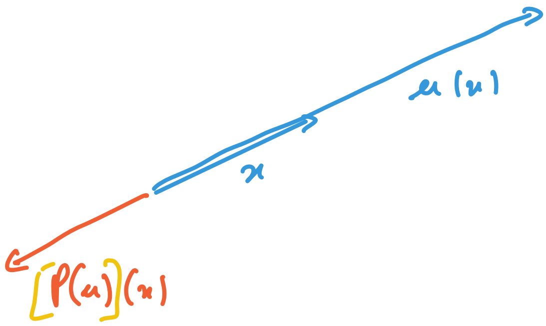
Remarque. *Rappelons que $P(u)$ désigne un endomorphisme, que l'on évalue en x. Ça n'aurait aucun sens de chercher à évaluer en P le vecteur $u(x)$.*

$u : E \to E$ linéaire

$P(u) : E \to E$ linéaire

Si $u(x) = \lambda x$

$$[P(u)](x) = P(\lambda)\, x$$



Preuve : • Si $P = X^k$

alors $P(u)(x) = u^k(x)$

$= u(u(u \dots u(x) \dots))$

$= u(u(u \dots \lambda x \dots))$

$= \lambda^k x$ par récurrence.

• Si $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$

alors $P(u)(x) = \left(\sum_{k=0}^{m} a_k u^k\right)(x)$

$= \sum_{k=0}^{m} \left(a_k u^k(x)\right)$

$= \sum_{k=0}^{m} \left(a_k \lambda^k x\right)$

$= \left(\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k\right) x$

$= P(\lambda) . x$

Proposition. Si P est annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$, alors toute valeur propre de u est racine de P.

Si P annulateur de u

alors $Sp(u) \subset \{\text{racines de } P\}$

Remarque: On n'aura pas toujours besoin de calculer χ_u.

La connaissance d'un polynôme annulateur

donne les candidats pour être v.p.

Preuve Soit $\lambda \in Sp(u)$.

Soit x vecteur propre associé : $u(x) = \lambda x$ et $x \neq 0$

donc $\underbrace{P(u)}_{0_{\mathcal{L}(E)}}(x) = P(\lambda).\, x$

$$P(u)(x) = 0_E$$

Or $x \neq 0$ donc $P(\lambda) = 0$

Exemple: Soit p un projecteur, ie $p \circ p = p$

Alors $X^2 - X = X(X-1)$ est annulateur de p

donc les vp sont à chercher parmi 0 et 1.

Polynôme caractéristique de p :

Soit $r = rg(p)$

$E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$

en base adaptée à cette décomposition

$$\mathrm{Mat}(p, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

donc $$\chi_p(X) = \det \left(\begin{array}{c|c} XI_r - I_r & 0 \\ \hline 0 & XI_{n-r} \end{array}\right)$$

$$= (X-1)^r X^{n-r}$$

- p est annulé par $X(X-1)(X-2)(X-3)$

en effet $\underbrace{(p \circ p - p)}_{0_{\mathcal{L}(E)}} \circ (p - 2\mathrm{Id}) \circ (p - 3\mathrm{Id})$

$$= 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Proposition. Si E est de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, alors les valeurs propres de u sont les racines du polynôme minimal π_u.

Corollaire. Si E est de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, alors les polynôme caractéristique χ_u et le polynôme minimal π_u ont les mêmes racines.

Remarque. *En résumé :*

- *Les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal*
- *Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique*
- *Si P est annulateur de u, les valeurs propres sont parmi les racines de P*

Exemple. On considère un projecteur p d'un espace vectoriel de dimension finie. Calculer son polynôme caractéristique χ_p, son polynôme minimal π_p et donner un autre polynôme, annulateur de p.

1.2 Cas des matrices

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $AX = \lambda X$ alors $P(A)X = P(\lambda)X$.

Proposition. Si P est annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors toute valeur propre de A est racine de P.

Si $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

alors $Sp(A) \subset \{$ racines de $P \}$

Proposition. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors les valeurs propres de A sont les racines du polynôme minimal π_A.

Corollaire. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors les polynôme caractéristique χ_A et le polynôme minimal π_A ont les mêmes racines.

Remarque. *En résumé :*

- *Les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal*
- *Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique*
- *Si P est annulateur de A, les valeurs propres sont parmi les racines de P*

Exemple. On considère la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ remplie de 1. Calculer son polynôme caractéristique χ_J, son polynôme minimal π_J et donner un autre polynôme, annulateur de J.

On cherche π_J.

On cherche donc un pol. annulateur de J.

(π_J en sera un diviseur.)

On cherche une CL nulle des puissances de J.

$$J^0 = I_n$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$J^2 = \left(J\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \cdots \middle| J\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nJ$$

donc $J^2 - nJ = 0$ ie $P = X^2 - nX$

est annulateur de J.

Ses diviseurs sont X et $(X-n)$ qui n'annulent pas J (car $J \neq \lambda I_n$) donc $\boxed{\pi_J = X(X-n)}$

Rmq : donc $Sp(J) \subset \{0, n\}$

Un autre pol. annulateur : multiple de π_J.

par ex $\quad P = X^2 (X-n)^3 (X-3)$

Pol caractéristique

$$\chi_J(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & X-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$

$$= (X-n) \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & X-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & -1 \\ 1 & -1 & \cdots -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$L_i \leftarrow L_i - L_1$

$$= (X-n) \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & X & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots 0 & X \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{(X-n)\, X^{n-1} = \chi_J(X)}$$

Exemple. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Pi_A = X^n = \chi_A}$$

2 Lemme de décomposition des noyaux

2.1 Le théorème

~~Lemme~~ Théorème de décomposition des noyaux.

Soit P_1, P_2 deux polynômes, que l'on suppose premiers entre eux ($P_1 \wedge P_2 = 1$). On note $P = P_1P_2$. Alors, pour tout endomorphisme u :

$$\mathrm{Ker}\left(P(u)\right) = \mathrm{Ker}\left(P_1(u)\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(P_2(u)\right)$$

Remarque. *On peut ajouter que les projecteurs associés à cette décomposition sont des polynômes en u.*

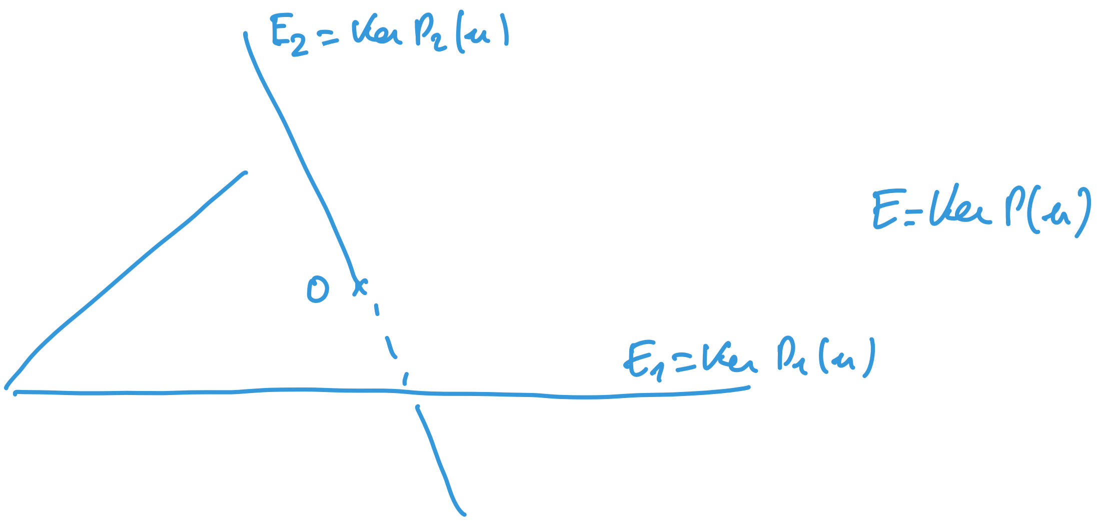
$u : E \longrightarrow E$

$P(u) : E \longrightarrow E$

$x \longmapsto 0$

$\underbrace{\mathrm{Ker}(P(u))}_{=E}$ sous-ev de E.

Lorsque P annulateur de u, $P = P_1 \cdot P_2$ $P_1 \wedge P_2 = 1$



Preuve:

- $P_1 \wedge P_2 = 1$ donc par Bézout

$$\exists U, V \in \mathbb{K}[X] \text{ tq } P_1U + P_2V = 1 = X^0$$

donc $(P_1U + P_2V)(u) = Id_E = u^0$

$$\| \quad P_1(u) \circ U(u) + P_2(u) \circ V(u)$$

$$\| \quad U(u) \circ P_1(u) + V(u) \circ P_2(u) \quad (*)$$

• Soit $x \in \operatorname{Ker} P_1(u) \cap \operatorname{Ker} P_2(u)$

ie $P_1(u)(x) = 0$ et $P_2(u)(x) = 0$

donc par ⊛

$$x = U(u)[P_1(u)(x)] + V(u)[P\,(u)(x)]$$

$$= 0$$

Ainsi <u>Ker $P_1(u)$ et Ker $P_2(u)$ sont en somme directe.</u>

$\operatorname{Ker}(P(u)) = \operatorname{Ker}(P_1(u)) \oplus \operatorname{Ker}(P_2(u))$

• $\boxed{\supset}$ Soit $x \in \operatorname{Ker} P_1(u) \oplus \operatorname{Ker} P_2(u)$

ie $\exists x_1 \in \operatorname{Ker} P_1(u)$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} P_2(u)$

tq $x = x_1 + x_2$

$$P(u)(x) = (P_1 P_2)(u)(x_1 + x_2)$$

$$= (P_1 P_2)(u)(x_1) + (P_1 P_2)(u)(x_2)$$

$$= P_2(u) \circ \underbrace{P_1(u)(x_1)}_{=0} + P_1(u) \circ \underbrace{P_2(u)(x_2)}_{=0}$$

$$= 0$$

donc $x \in \operatorname{Ker} P(u)$

$\operatorname{Ker}(P(u)) = \operatorname{Ker}(P_1(u)) \oplus \operatorname{Ker}(P_2(u))$

• $\boxed{\subset}$ Soit $x \in \operatorname{Ker} P(u)$ ie $P_1 P_2(u)(x) = 0$

Par ⊛

$$x = \underbrace{P_1(u) \circ U(u)(x)}_{\text{noté } x_2} + \underbrace{P_2(u) \circ V(u)(x)}_{\text{noté } x_1}$$

$$P_1(u)(x_1) = P_1(u) \circ P_2(u) \circ V(u)(x)$$
$$= (P_1 P_2)(u) \circ V(u)(x)$$
$$= V(u) \circ \underbrace{P_1 P_2(u)(x)}_{= 0_E}$$
$$= 0$$

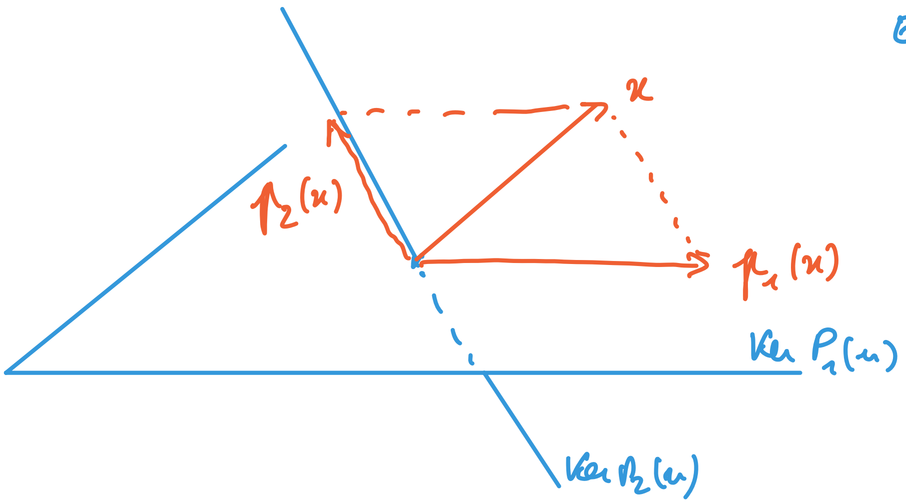
ie $x_1 \in \mathrm{Ker}\, P_1(u)$

De même $x_2 \in \mathrm{Ker}\, P_2(u)$.

__ccl__ : $x \in \mathrm{Ker}\, P_1(u) \oplus \mathrm{Ker}\, P_2(u)$

Remarque. *On peut ajouter que les projecteurs associés à cette décomposition sont des polynômes en u.*

$E = \mathrm{Ker}\, P_1P_2(u)$



$$p_1 : E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto x_1 \quad \text{où} \quad x = x_1 + x_2$$
$$\in \mathrm{Ker}\, P_1(u) \oplus \mathrm{Ker}\, P_2(u)$$

$$\exists\, Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tq } p_1 = Q(u)$$

Ah oui ! $p_1(x) = x_1$

$$= P_2(u) \circ V(u)\,(x) \quad \text{(cf preuve)}$$

On pose $Q = P_2 V$

alors $p_1 = Q(u)$

est polynôme de l'endomorphisme u.

Corollaire. Soit $P_1, \dots, P_r$ des polynômes deux à deux premiers entre eux. On note $P = P_1 \dots P_r$. Alors, pour tout endomorphisme u :

$$\operatorname{Ker}\big(P(u)\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\big(P_i(u)\big)$$

Corollaire. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur non nul de $u \in \mathcal{L}(E)$. On note :

$$P = \lambda P_1^{m_1} \dots P_r^{m_r}$$

sa décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{K}$. Alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\big(P_i^{m_i}(u)\big)$$

C'est $\operatorname{Ker} P(u)$ car $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

2.2 Exemple d'utilisation

Exemple. On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$y^{(3)} + 4y'' + 4y' + 3y = 0 \qquad (E)$$

où $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnue.

1. Montrer que si ϕ est solution de (E), alors ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. On considère $u : f \mapsto f'$ endomorphisme de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Écrire l'ensemble S des solutions de (E) comme $\mathrm{Ker}\,\big(P(u)\big)$, où $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme que l'on précisera.
3. Décomposer P en produit de facteurs irréductibles.
4. En déduire la résolution de E par la résolution de deux équations différentielles d'ordre < 3.

① Soit ϕ sol de (E) alors ϕ est 3 fois dérivable

et $\phi^{(3)} = \underbrace{-4\phi'' - 4\phi - 3\phi}_{\text{dérivable}}$

donc $\phi^{(3)}$ est dérivable

donc ϕ est 4-fois dérivable.

par rec, ϕ est k-fois dérivable $\forall k \geq 3$.

② Soit $\phi \in E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$\phi \in S$

$\iff \forall x \in \mathbb{R} \quad \phi'''(x) + 4\phi''(x) + 4\phi'(x) + 3\phi(x) = 0$

$\iff \forall x \in \mathbb{R} \quad u^3(\phi)(x) + 4u^2(\phi)(x) + 4u(\phi)(x) + 3\phi(x) = 0_{\mathbb{R}}$

$\iff \forall x \in \mathbb{R} \quad [u^3(\phi) + 4u^2(\phi) + 4u(\phi) + 3\phi](x) = 0_{\mathbb{R}}$

$\iff u^3(\phi) + 4u^2(\phi) + 4u(\phi) + 3\phi = 0_E$

$\iff P(u)(\phi) = 0_E$

où $P = X^3 + 4X^2 + 4X + 3$

$\Leftrightarrow \phi \in \operatorname{Ker} P(u)$

Ainsi $S = \operatorname{Ker} P(u)$

(Remq : Soit un ev, sous-ev de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)

$P(u) : E \longrightarrow E$

③ $P = X^3 + 4X^2 + 4X + 3$

on cherche une racine parmi les diviseurs de 3 : $1, -1, 3, -3$

$= (X+3)(X^2 + 1\, X + 1)$

$= (X+3)(X^2 + X + 1)$

et $\underbrace{(X+3)}_{P_1} \wedge \underbrace{(X^2+X+1)}_{P_2} = 1$

④ Par le lemme des noyaux :

$S = \operatorname{Ker} P(u)$

$= \operatorname{Ker} P_1(u) \oplus \operatorname{Ker} P_2(u)$

- Recherche de $\operatorname{Ker} P_1(u)$

$\phi \in \operatorname{Ker} P_1(u) \Leftrightarrow (u + 3\,\mathrm{Id})(\phi) = 0$

$\Leftrightarrow \phi' + 3\phi = 0$

$\Leftrightarrow \phi \in \operatorname{Vect}(x \mapsto e^{-3x})$

- <u>Recherche de $\operatorname{Ker} P_2(u)$</u>

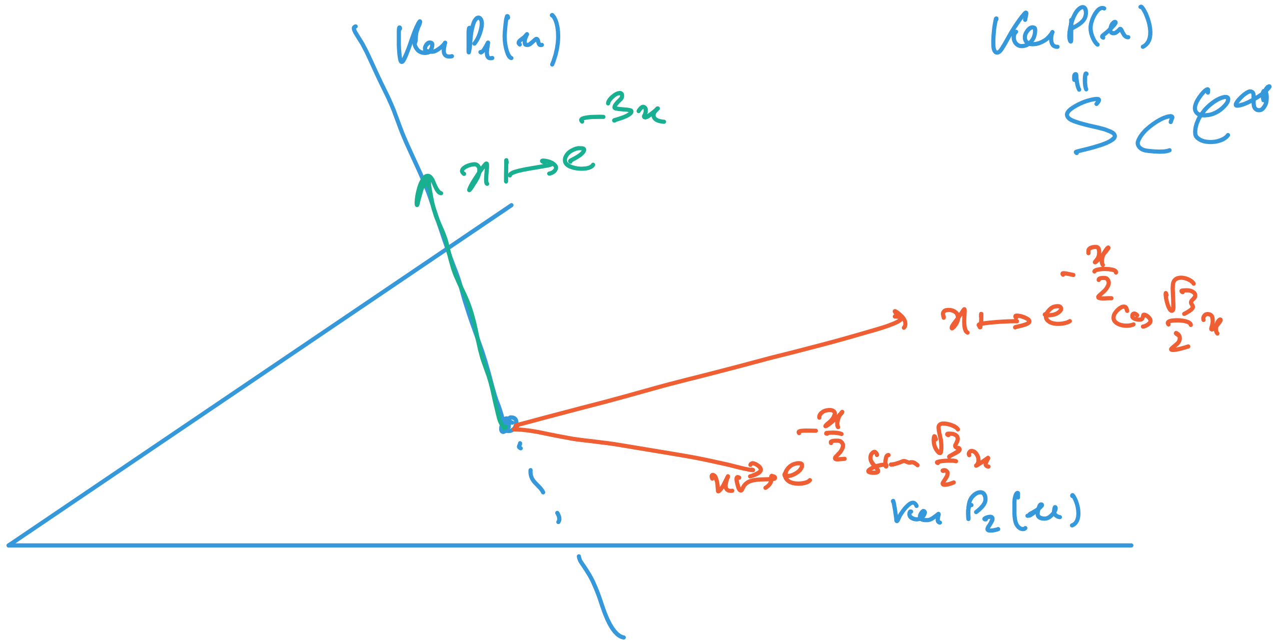
$$\phi \in \operatorname{Ker} P_2(u) \iff \phi'' + \phi' + \phi = 0$$

On reconnaît une EDL d'ordre 2 à coeff constants homogène.

$$r^2 + r + 1 = \left(r - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(r - e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)$$

$$= \left(r - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(r - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$\iff \phi \in \operatorname{Vect}\left(x \mapsto e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), x \mapsto e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$



Donc $S = \left\{ x \mapsto Ae^{-3x} + Be^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + Ce^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \text{ où } A, B, C \in \mathbb{R} \right\}$

Remarque :

On aurait pu "vectorialiser" le problème.

$$y^{(3)} + 4y'' + 4y' + 3y = 0 \qquad (E)$$

y sol de (E)

$$\iff y''' + 4y'' + 4y' + 3y = 0_E$$

$$\iff \begin{cases} y' = y' \\ y'' = y'' \\ y''' = -4y'' - 4y' - 3y \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$$

$$\iff Y' = AY \qquad \text{où } Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Matrice compagnon.

$$\chi_A = X^3 + 4X^2 + 4X + 3$$
$$= (X+3)(X^2+X+1)$$
$$= (X+3)(X-j)(X-j^2)$$

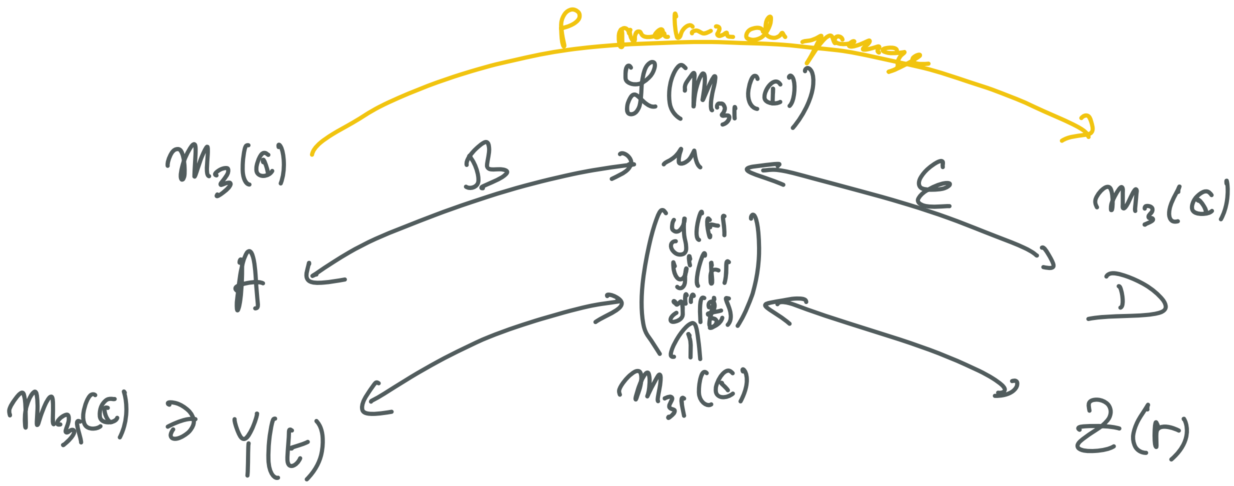
scindé simple

donc A diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$

$\exists P \in GL_3(\mathbb{C})$ tq

$$A = P \begin{pmatrix} -3 & & \\ & j & \\ & & j^2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$Y' = AY \iff \cancel{Z' = DZ}$$



$$A = PDP^{-1}$$

$$Y(t) = P\,Z(t)$$

$\forall t \quad Y'(t) = A\,Y(t)$

$\iff \forall t \quad P\,Z'(t) = PDP^{-1}\,P\,Z(t)$

$\iff \forall t \quad Z'(t) = D\,Z(t)$

$$\iff \forall t \quad \begin{cases} z_1'(t) = -3\,z(t) \\ z_2'(t) = j\,z(t) \\ z_3'(t) = j^2\,z(t) \end{cases}$$

$\iff \exists A, B, C \in \mathbb{C}$ tq

#)

$$z_1(t) = Ae^{-3t}$$

$$z_2(t) = Be^{jt}$$

$$= Be^{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}$$

$$= Be^{-\frac{t}{2}} \cdot \left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$z_3(t) = \dots$$

3 Polynômes annulateurs et réduction

3.1 Une CNS de diagonalisabilité

Théorème.

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :
>
> $$\text{(i) } u \text{ est diagonalisable} \iff \text{(ii) il existe un polynôme annulateur de } u \text{ scindé à racines simples}$$
> $$\iff \text{(iii) } \pi_u \text{ est scindé à racines simples}$$

Proposition. On peut donc aussi écrire :

$$u \text{ est diagonalisable} \iff \pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$$

Exemple. Un projecteur, une symétrie sont diagonalisables.

(χ_u scindé simple $\Longrightarrow$ u diagonalisable)

(i) $\Rightarrow$ (ii) On suppose u diagonalisable.

Soit $\lambda_1, \dots \lambda_p$ les vp 2 à 2 distinctes

On sait que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2 I} \end{pmatrix}$$

Posons $P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$ Mq $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Pour $x_i \in E_{\lambda_i}(u) = \ker(u - \lambda_i \, Id)$

$$(X - \lambda_i)(u)(x_i) = 0$$

donc $P(u)(x_i) = 0$

Donc l'endomorphisme $P(u)$ s'annule sur chaque $E_{\lambda_i}(u)$

donc sur E car $E = \bigoplus E_{\lambda_i}(u)$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Soit P scindé simple tq $P(u) = 0$

Par déf du polynôme minimal, $\pi_u \mid P$

donc π_u est scindé simple.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

On suppose π_u est scindé simple

ie $\pi_u = \prod_{j=1}^{q} (X - \mu_j)$

μ_j 2 à 2 distincts

Les $(X - \mu_j)$ sont premiers entre eux.

donc, par le lemme de noyaux :

$$E = \mathrm{Ker}\, \pi_u(u)$$

$$= \bigoplus_{j=1}^{q} \mathrm{Ker}\, (X - \mu_j)(u)$$

$$= \bigoplus_{j=1}^{q} \mathrm{Ker}(u - \mu_j \mathrm{Id}_E)$$

ce sont les espaces propres de u et $\{0\}$

$E_{\mu_j}(u)$ si $\mu_j \in Sp(u)$

$\{0\}$ si $\mu_j \notin Sp(u)$

donc u diagonalisable