

Pour je: 250.1, 250.2

Polynômes d'endomorphisme, polynômes de matrice

$$u: E \longrightarrow E \quad \text{linéaire}$$
$$x \longmapsto u(x)$$

$$(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot) \quad \text{algèbre} \quad \begin{array}{l} \text{non commutative} \\ \text{non intègre} \end{array}$$

$$u \circ u = u^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{m+1} = u^m \circ u \\ u^0 = \text{vecteur de } 0 = \text{Id}_E \end{array} \right.$$

1 Polynôme d'un endomorphisme

1.1 Définition

Définition. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, et $P = p_d X^d + \dots + p_1 X + p_0 \in \mathbb{K}[X]$, on définit le **polynôme de l'endomorphisme u** :

$$P(u) = p_d u^d + \dots + p_1 u + p_0 \text{Id}_E$$

u^0 $\begin{array}{l} \text{pol. en } u \\ \text{pol. de } u \end{array}$

C'est un endomorphisme de E .

On note $\mathbb{K}[u]$ l'ensemble des polynômes de l'endomorphisme u .

On dit qu'un endomorphisme v est un **polynôme de l'endomorphisme u** lorsque $v \in \mathbb{K}[u]$, i.e. lorsqu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v = P(u)$.

Remarque. u^k désigne $\underbrace{u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$.

$P(u)$ n'est pas de la fonction polynomiale associée à P évaluée en u .

Exemple. Avec $P = X^3 - 2X + 1$, $P(u) = u^3 - 2u + \text{Id}_E$, et donc $P(u)(x) = u^3(x) - 2u(x) + x$.

Définition. On dit que P est **annulateur de u** lorsque $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$$\tilde{P}: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$t \longmapsto \tilde{P}(t)$$

$$P = X^3 - 2X + 1 = X^3 - 2X + X^0$$

$$P(u): E \longrightarrow E$$

$$P(u) \in \mathcal{L}(E)$$

$$x \longmapsto (u^3 - 3u + \text{Id}_E)(x)$$

$$\forall x \in E \quad P(u)(x) = u^3(x) - 3u(x) + x$$

~~$P(x)$~~

~~$(u(x))^3$~~ pas produit de vecteurs.

1.2 Morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$

Théorème.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note :

$$\begin{array}{ccc} \phi_u : \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \mapsto & P(u) \end{array}$$

- ϕ_u est un morphisme d'algèbres
- $\text{Im } \phi_u = \mathbb{K}[u]$
- $\text{Ker } \phi_u$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$

Preuve: Montrer ϕ_u morphisme d'algèbres.

- ϕ_u est à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$

(i.e. $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(u)$ est un endomorphisme de E)

- $\phi_u(\lambda P + \mu Q) = ?$

$$\text{soit } P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \quad Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$$

$$n = \max(p, q)$$

On complète les sommes avec des zéros

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \quad Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$$

$$\lambda P + \mu Q = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k + \mu b_k) X^k$$

$$\underline{\text{Donc}} \quad \phi_u(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(u)$$

$$= \sum_{k=0}^n (\lambda a_k + \mu b_k) u^k \quad \text{par def.}$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^n a_k u^k + \mu \sum_{k=0}^n b_k u^k \quad \text{calcul dans } \mathcal{L}(E)$$

$$= \lambda P(u) + \mu Q(u)$$

$$= \lambda \phi_u(P) + \mu \phi_u(Q)$$

- Pour $\phi_\mu(1) = 1$ et $\phi_\mu(x^0) = \text{Id}_E$
Ben oui

- $\phi_\mu : (\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot) \rightarrow (\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$
 $P \longmapsto P(\mu)$

Pour $\phi_\mu(P \times Q) = \phi_\mu(P) \circ \phi_\mu(Q)$

Étape 1: Cas où $P = X^i$, $Q = X^j$

$$\begin{aligned}\phi_\mu(X^i \times X^j) &= \phi_\mu(X^{i+j}) \\ &= \mu^{i+j} \\ &= \mu^i \circ \mu^j \\ &= \phi_\mu(X^i) \circ \phi_\mu(X^j)\end{aligned}$$

Étape 2: Cas où $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et $Q = X^j$

$$\phi_\mu(P \times Q) = \phi_\mu\left(\sum_{i=0}^n a_i X^i \times X^j\right)$$

$$= \sum_{i=0}^n a_i \phi_\mu(X^i \times X^j)$$

par linéarité

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n \left(a_i \phi_n(x^i) \circ \phi_n(x^j) \right) \quad \text{par étape 1} \\
&= \left(\sum_{i=0}^n a_i u^i \right) \circ \phi_n(x^j) \\
&\quad \text{règles de calcul dans } \mathcal{L}(E)
\end{aligned}$$

$$= \phi_n(P) \circ \phi_n(x^j)$$

Étape 3 Soit $P \in \mathbb{K}[x]$, $Q = \sum_{j=0}^q b_j x^j$

$$\begin{aligned}
\phi_n(P \times Q) &= \phi_n \left(\sum_{j=0}^q b_j P \times x^j \right) \\
&= \sum_{j=0}^q b_j \phi_n(P \times x^j) \quad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{j=0}^q b_j \phi_n(P) \circ \phi_n(x^j) \quad \text{par étape 2} \\
&= \phi_n(P) \circ \left(\sum_{j=0}^q b_j u^j \right) \\
&= \phi_n(P) \circ \phi_n(Q)
\end{aligned}$$

Ça y est! ϕ_n est un morphisme d'algèbres.

On a montré: $\boxed{(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)}$

- $\text{Im } \phi_n = \mathbb{K}[u]$ par définition de $\mathbb{K}[u]$
- $\text{Ker } \phi_n$ idéal de $\mathbb{K}[x]$ cf cours auvergne.

Exemple. Comme $P = X^3 - 2X + 1 = (X-1)(X^2 + X - 1)$, par le morphisme ϕ_u , on déduit $u^3 - 2u + \text{Id}_E = (u - \text{Id}_E) \circ (u^2 + u - \text{Id}_E)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E) &\ni u^3 - 2u + \text{Id}_E & X^3 - 2X + 1 &= (X-1)(X^2 + X - 1) \\ &= (u - \text{Id}_E) \circ (u^2 + u - \text{Id}_E) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &\ni (u^3 - 2u + \text{Id}_E)(x) = u^3(x) - 2u(x) + x \\ &= (u - \text{Id}_E)(u^2(x) + u(x) - x) \end{aligned}$$

Proposition.

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[u] &= \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\} \\ &= \text{Vect}((u^n)_{n \in \mathbb{N}}) \end{aligned}$$

$\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Preuve:

$$\mathbb{K}[u] = \text{Ten } \phi_u \quad \text{car } (1, X, X^2, \dots, X^m, \dots) \text{ base de } \mathbb{K}[X]$$

$$= \text{Vect}(\phi_u(1), \phi_u(X), \phi_u(X^2), \dots, \phi_u(X^m), \dots)$$

$$= \text{Vect}(\text{Id}_E, u, u^2, \dots, u^m, \dots)$$

sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ car Ten ϕ_u .

Preuve $\mathbb{K}[u]$ commutative

$$\text{Soit } v, w \in \mathbb{K}[u] \text{ i.e. } \exists P, Q \in \mathbb{K}[X]$$

$$\text{t.q. } v = P(u) \text{ et } w = Q(u)$$

$$v \circ w = P(u) \circ Q(u)$$

$$\begin{aligned}
 &= (P \times Q)(u) \quad \downarrow \mathbb{K}[X] \text{ commutatif.} \\
 &= (Q \times P)(u) \\
 &= Q(u) \circ P(u)
 \end{aligned}$$

Règles de calcul. Pour P, Q polynômes, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$(\lambda P + \mu Q)(u) = \lambda P(u) + \mu Q(u)$$

$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$$

$P(u)$ et $Q(u)$ commutent

$$1(u) = \text{Id}_E$$

1.3 Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Le morphisme :

$$\begin{aligned} \phi_u : \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathcal{L}(E) \\ P &\mapsto P(u) \end{aligned}$$

n'est pas injectif. $\text{Ker } \phi_u$ est un idéal non nul de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$, appelé **idéal des polynômes annulateurs** de u . Il existe un unique polynôme unitaire, noté π_u et appelé **polynôme minimal** de u , tel que :

$$\begin{aligned} \text{Ker } \phi_u &= (\pi_u) = \{\pi_u Q, Q \in \mathbb{K}[X]\} \\ &= \pi_u \mathbb{K}[X] \end{aligned}$$

Remarque. On peut aussi trouver la notation μ_u pour le polynôme minimal de u .

Preuve: Pour ϕ_u non injectif. (on a supposé $\dim E = n$)

$$\dim \mathcal{L}(E) = n^2$$

donc $(\text{Id}_E, u, u^2, \dots, u^{n^2})$ est liée

car elle comporte $n^2 + 1$ éléments

ie $\exists a_0, a_1, \dots, a_{n^2}$ non tous nuls tq

$$a_0 \text{Id}_E + a_1 u + \dots + a_{n^2} u^{n^2} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

On note $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n^2} X^{n^2} \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$

$P(u) = 0$ ie $P \in \text{Ker } \phi_u$ donc ϕ_u non injectif.

Proposition. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie :

$$Q(u) = 0 \iff \pi_u \mid Q$$

π_u est le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule u .

Exemple. Déterminer le polynôme minimal d'une homothétie λId_E .

Exemple. Déterminer le polynôme minimal d'un projecteur, i.e. un endomorphisme p tel que $p \circ p = p$.

Exemple. Déterminer le polynôme minimal d'une symétrie, i.e. un endomorphisme s tel que $s \circ s = \text{Id}_E$.

Exemple. On considère $D : P \mapsto P'$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$. Montrer que D n'admet pas de polynôme minimal.

On cherche μ_p .

Où! $X^2 - X$ est annulateur de p

$$\begin{aligned} \text{car } (X^2 - X)(p) &= p^2 - p \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \mu_p \mid X^2 - X = X(X-1)$$

et donc $\mu_p = X$ ou $\mu_p = X-1$ ou $\mu_p = X(X-1)$

Si $\mu_p = X$ alors $p = 0$ est un projecteur où $F = \{0\}$ $G = E$

Si $\mu_p = X-1$ alors $\underbrace{(X-1)(p)}_{\in \mathcal{L}(E)} = 0$ i.e. $p - \text{Id}_E = 0$

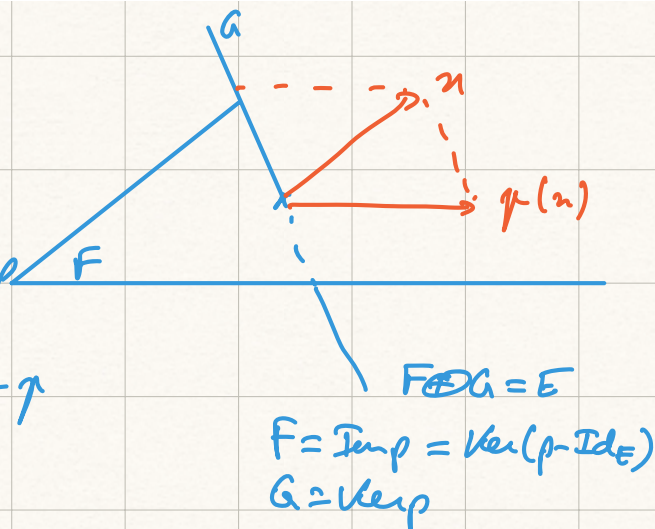
projecteur où $F = E$ $G = \{0\}$

1^{er} cas: Si $p = \text{Id}_E$, $\mu_p = X-1$

2^e cas Si $p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ $\mu_p = X$

3^e cas Si $p \neq 0$ et $p \neq \text{Id}$

alors $\mu_p = X(X-1)$



Exemple. On considère $D : P \mapsto P'$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$. Montrer que D n'admet pas de polynôme minimal.

$$D: \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$$

$$P \longmapsto P'$$

$$\text{ie } \ker \phi_D = \{0\}$$

$$\forall Q \in \mathbb{K}[X], Q(D) \neq 0$$

$$\text{Soit } Q \in \mathbb{K}[X] \text{ où } Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k \quad Q \neq 0$$

$$\text{On suppose } Q(D) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])}$$

$$\text{ie } \forall P \in \mathbb{K}[X] \quad Q(D)(P) = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad \sum_{k=0}^n a_k D^k(P) = 0$$

$$a_0 P^{(0)} + a_1 P' + a_2 P'' + \dots + a_n P^{(n)}$$

$$\text{en particulier pour } P = X^n$$

$$a_0 X^n + a_1 n X^{n-1} + a_2 n(n-1) X^{n-2} + \dots + a_n n! = 0$$

$$\text{or } (1, X, \dots, X^{n-1}) \text{ libre}$$

$$\text{donc } a_0 = 0 \quad a_1 = 0 \quad \dots \quad a_n = 0$$

$$\text{donc } Q = 0$$

1.4 Base de $\mathbb{K}[u]$

Théorème.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme minimal π_u , et on note $d = \deg(\pi_u)$. Alors $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

$\mathbb{K}[u]$ est de dimension d

Remarque.

- Dans le cas du théorème, $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \pi_u$.
- $\phi_u : P \mapsto P(u)$ induit dans le cas du théorème un isomorphisme entre les espaces vectoriels $(\mathbb{K}_d[X], +, \cdot)$ et $(\mathbb{K}[u], +, \cdot)$.
- Si u n'admet pas de polynôme minimal, c'est-à-dire lorsque ϕ_u est injective, ϕ_u est un isomorphisme d'algèbres entre $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ et $(\mathbb{K}[u], +, \circ, \cdot)$.

Preuve: • $\mathbb{K}[u] = \text{Vect} (u^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

donc $\text{Vect} (u^k)_{0 \leq k \leq d-1} \subset \mathbb{K}[u]$

• Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

On effectue la division eucl. de P par π_u .

$$\exists ! (Q, R) \in \mathbb{K}[X] \quad \begin{cases} P = Q \pi_u + R \\ R \in \mathbb{K}_{d-1}[X] \end{cases}$$

et donc, en posant les polynômes d'endomorphismes :

$$P(u) = Q(u) \circ \underbrace{\pi_u(u)}_{\text{Id}} + R(u)$$

$$= R(u)$$

$$\in \text{Vect} (u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$$

De plus, $(\text{Id}, u, \dots, u^{d-1})$ est libre
par unicité du degré de π_u .

Ans: $(Id, u, \dots, u^{d-1})$ base de $(K[u])$.

Remarque:

$$\begin{aligned}\phi_u : K[x] &\longrightarrow \mathcal{V}(E) \\ P &\longmapsto P(u)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_u : K[x] &\xrightarrow{\text{surjective}} K[u] = \text{Im } \phi_u \\ P &\longmapsto P(u)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\check{\phi}_u : K_{d-1}[x] &\longrightarrow K[u] \\ P &\longmapsto P(u)\end{aligned}$$

isomorphisme d'ev.

$$\begin{array}{ccc}
 u \in \mathcal{U}(E) & \xleftrightarrow{B} & A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\
 P(u) & \xleftrightarrow{\quad} & P(A) \\
 \text{endom} & & \text{matrice} \\
 u(x) & & AX \\
 \\
 \text{Soit } A & \phi_A : \mathbb{K}[X] \xrightarrow{+, X, \cdot} & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\
 & P \mapsto & P(A) \\
 \\
 \text{où } P(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^k \text{ lorsque } P = \sum_{k=0}^n a_k X^k
 \end{array}$$

2 Polynôme d'une matrice

2.1 Définition

Définition. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = p_d X^d + \dots + p_1 X + p_0 \in \mathbb{K}[X]$, on définit le **polynôme de la matrice** A :

$$P(A) = p_d A^d + \dots + p_1 A + p_0 I_n$$

C'est une matrice carrée.

On note $\mathbb{K}[A]$ l'ensemble des polynômes de la matrice A .

On dit qu'une matrice B est un **polynôme de la matrice** A lorsque $B \in \mathbb{K}[A]$, i.e. lorsqu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = P(A)$.

Remarque. A^k désigne $\underbrace{A \times \dots \times A}_{k \text{ fois}}$.

$P(A)$ n'est pas de la fonction polynomiale associée à P évaluée en A .

2.2 Morphisme d'algèbres $P \mapsto P(A)$

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note :

$$\begin{array}{ccc}
 \phi_A : \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\
 P & \mapsto & P(A)
 \end{array}$$

- ϕ_A est un morphisme d'algèbres
- $\text{Im } \phi_A = \mathbb{K}[A]$
- $\text{Ker } \phi_A$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$

↑ matrice

Proposition.

$$\begin{aligned}\mathbb{K}[A] &= \{P(A), P \in \mathbb{K}[X]\} \\ &= \text{Vect}((A^n)_{n \in \mathbb{N}})\end{aligned}$$

$\mathbb{K}[A]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Règles de calcul. Pour P, Q polynômes, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$(\lambda P + \mu Q)(A) = \lambda P(A) + \mu Q(A)$$

$$(PQ)(A) = P(A) \times Q(A)$$

$P(A)$ et $Q(A)$ commutent

$$1(A) = I_n$$

Si A est triangulaire, les coefficients diagonaux de $P(A)$ sont connus :

$$\text{Lorsque } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ alors } P(A) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & * & \dots & * \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

• Pour $P = X^k$:

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \quad \text{par récurrence sur } k$$

• Pour $P = \sum_{k=0}^{\uparrow} a_k X^k$

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\uparrow} a_k A^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\uparrow} a_k \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\uparrow} a_k \lambda_1^k & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum_{k=0}^{\uparrow} a_k \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Trucs! Si A est diagonalisable

on peut écrire $A = Q D Q^{-1}$

où $Q \in GL_n(\mathbb{K})$

et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$P(A) = P(Q D Q^{-1})$$

$$= \sum_{k=0}^{\uparrow} a_k (Q D Q^{-1})^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\uparrow} a_k Q D^k Q^{-1}$$

$$= Q \left(\sum_{k=0}^{\uparrow} a_k D^k \right) Q^{-1}$$

$$= Q \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Trucs! Avec $P = \chi_A$, $\chi_A(\lambda_i) = 0 \quad \forall i$

$$\text{donc } \chi_A(A) = Q \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = 0$$

Donc si A diagonalisable, χ_A annulateur de A .

2.3 Polynôme minimal d'une matrice carrée

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le morphisme :

$$\begin{aligned}\phi_A : \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P &\mapsto P(A)\end{aligned}$$

n'est pas injectif. $\text{Ker } \phi_A$ est un idéal non nul de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$, appelé **idéal des polynômes annulateurs de A** . Il existe un unique polynôme unitaire, noté π_A et appelé **polynôme minimal de A** , tel que :

$$\text{Ker } \phi_A = (\pi_A) = \{\pi_A Q, Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

Remarque. On peut aussi trouver la notation μ_A pour le polynôme minimal de A .

Proposition. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$Q(A) = 0 \iff \pi_A \mid Q$$

π_A est le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule A

Exemple. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, déterminer le polynôme minimal de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Stratégie : trouver un pol. annulateur.
 ↑ calculer les puissances de A
 chercher parmi ses diviseurs.

(P1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$u(e_1) = 0$
 $u(e_j) = e_{j-1}$

(P2)

$$A^2 = A \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & & & & \\ \hline 1 & & & & \\ \hline 0 & E_1 & E_2 & \dots & E_{n-1} \\ \hline 0 & & & & \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} A0 & AE_1 \\ \hline \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} AE_{n-1} \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & C_1 & \dots & \dots & C_{n-1} \end{array} \right)$$

= décaler A vers la droite

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

⋮

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 & 1 \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = (0)$$

donc X^n est annulateur de A .

donc $\pi_A \mid X^n$ ie $\pi_A = X^k$ où $k \leq n$

car X^k n'annule pas A si $k < n$

donc $\pi_A = X^n$

2.4 Base de $\mathbb{K}[A]$

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, π_A son polynôme minimal, et on note $d = \deg(\pi_A)$. Alors $(A^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[A]$.

Remarque.

- $\dim \mathbb{K}[A] = \deg \pi_A$.
- $\phi_A : P \mapsto P(A)$ induit dans le cas du théorème un isomorphisme entre les espaces vectoriels $(\mathbb{K}_d[X], +, \cdot)$ et $(\mathbb{K}[A], +, \cdot)$.

$$\mathbb{K}[A] = \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{d-1})$$

où $d = \deg \pi_A$

3 Lien entre les deux notions

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \text{Mat}(P(u), \mathcal{B}) = P(\text{Mat}(u, \mathcal{B}))$$

$$u \in \mathcal{L}(E) \xleftrightarrow{\mathcal{B}} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$P(u) \xleftrightarrow{\quad} P(A)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \mathcal{Q} \\ \mathcal{B} \\ P(\mathcal{B}) \end{array}$$

$$A = Q B Q^{-1}$$

$$P(A) = Q P(B) Q^{-1}$$

