pour ve : 240.21, 240.22, 240.25

4 Polynôme caractéristique

4.1 Polynôme caractéristique d'une matrice

Définition. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit :

$$\chi_A = \det(XI_n - A) \in \mathbb{K}[X]$$

appelé le **polynôme caractéristique de** A.

α β φ ζ ξ χ

alpha beta phi zeta xi chi [ki]

$$\chi_A(0) = \det(0I_n - A) = \det(-A) = \begin{vmatrix} -C_1 & -C_2 & \cdots & -C_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \det A$$

Proposition. χ_A est de degré n et on connaît *a priori* quelques coefficients :

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

Proposition. Les valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les racines de son polynôme caractéristique χ_A.

ie $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Rac}(\chi_A)$

$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff A - \lambda I_n$ non inversible

$\iff \underbrace{\det(A - \lambda I_n)}_{= (-1)^n \chi_A(\lambda)} = 0$

$\iff \chi_A(\lambda) = 0$

Exemple. Déterminer les valeurs propres de :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+2 & 0 & -1 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$= \begin{vmatrix} X+2 & 0 & -1 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 0 & -X & X \end{vmatrix}$$

$$= X \begin{vmatrix} X+2 & -1 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 + C_3$

dév L_3

$$= X \cdot 1 \cdot (-1)^{3+3} \left(X^2 - 4 + 1 \right)$$

$$= X\,(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$$

Les vp de A sont 0, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ simples.

A est diagonalisable : χ_A scindé simple

$$E_0(A) = \mathrm{Ker}(A - 0I_3) \leftarrow \text{de dim } 1$$

$$= \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_1 + 2C_3 - C_2 = 0$

$C_1 - C_2 + 2C_3 = 0$

$$= \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

car $C_1 - C_2 + 2C_3 = 0$

et $\dim E_0(A) \leq m(0) = 1$

Exemple. Déterminer les valeurs propres de :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & X-1 & -1 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$= \begin{vmatrix} X-1 & -(X-1) & 0 \\ -2 & X-1 & -1 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ -2 & X-1 & -1 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 + C_1$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & X-3 & -1 \\ 1 & 0 & X-1 \end{vmatrix}$$

dév L_1

$$= (X-1)^2 (X-3)$$

Donc 3 vp simple, 1 vp double.

$E_3(B)$ droite vecto

$E_1(B)$ droite vecto ou plan vecto

$\uparrow$ B pas diago $\qquad$ $\uparrow$ B diago

$$E_1(B) = \mathrm{Ker}(B - 1I_3)$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de rang 2 car C_1, C_2 indep et $C_1 + C_2 - 2C_3 = 0$

$$= \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

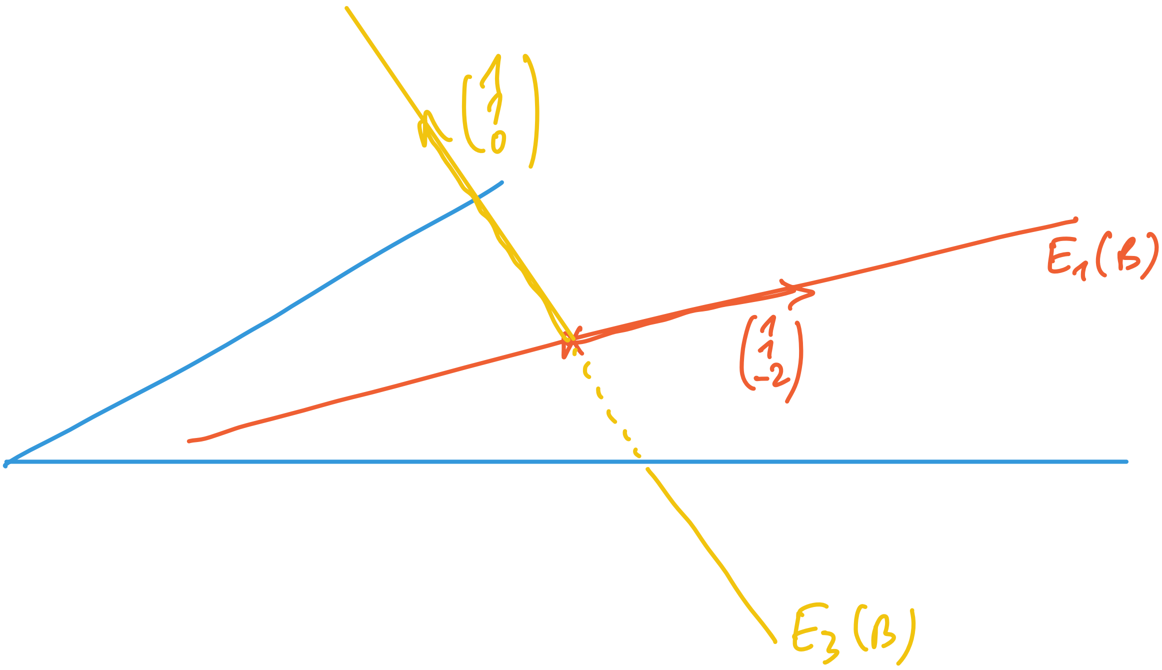
de dim 1 donc <u>B non diagonalisable</u>.

$$E_3(B) = \operatorname{Ker}(B - 3I_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

de rang 2

$C_1 + C_2 = 0$

$$= \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Exemple. Déterminer les valeurs propres de :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_C(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & -2 \\ -1 & 1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 + C_1$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2$

$$= \begin{vmatrix} X-1 & X-2 & -1 \\ 0 & X-2 & -2 \\ -1 & 0 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$= (X-2) \begin{vmatrix} X-1 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & X-3 \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$= (X-2) \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ -X+1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & X-3 \end{vmatrix}$$

dév C_2

$$= (X-2)(-) \begin{vmatrix} -X+1 & -1 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$= (X-2) \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$= (X-2)(X^2 - 4X + 4)$$

$$= (X-2)^3$$

Donc 2 est vp triple.

$$E_2(C) = \operatorname{Ker}(C - 2I_3)$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

de dim 1

rang ≥ 2 $\quad C_2, C_3$ libre

$C_1 + C_2 = 0$

donc C n'est pas diagonalisable

Remarque Si C n'a qu'une vp, elle n'est pas diagonalisable (sauf si C diagonale !)

Sinon : $C = P\begin{pmatrix} 2 & & (0) \\ & 2 & \\ (0) & & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$

$= P \; 2\cdot I_3 \; P^{-1}$

$= 2I_3$

Exemple. Déterminer les valeurs propres de :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_D(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ 3 & X+1 & -3 \\ -3 & -3 & X+1 \end{vmatrix} \quad \text{dév } L_1$$

$$= (X-2)(X+1-3)(X+1+3)$$

$$= (X-2)^2(X+4)$$

2 vp double, -4 vp simple.

$$E_2(D) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

de rang 1

$C_1 - C_2 = 0$, $C_1 + C_3 = 0$

$$= \operatorname{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{V_2}\right)$$

D diagonalisable car χ_D scindé, $\dim E_2(D) = 2 = m(2)$

$m(-4) = 1$

$$E_{-4}(D) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

de rang 2

$C_2 - C_3 = 0$

$$= \operatorname{Vect}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{V_3}$$

<u>Avec</u> $P = \left(V_1 \middle| V_2 \middle| V_3 \right)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Pass}\left(\mathrm{can} \to (V_1, V_2, V_3)\right)$$

$$\Delta = \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} u(V_1) & u(V_2) & u(V_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \end{array} \qquad \Delta' = \cancel{\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

on a $\quad D = P \, \Delta \, P^{-1}$

Exemple. Déterminer les valeurs propres de :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple. Déterminer les valeurs propres de :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$\chi_F = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix}$$

déterminant circulant

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & X & -1 \\ 1 & 0 & X \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X+1 & -1 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix}$$

dev C_1

$$= (X-1)(X^2+X+1)$$

irréductible dans $\mathbb{R}$

$$Sp_{\mathbb{R}}(F) = \{1\}$$

χ_F non scindé sur $\mathbb{R}$ donc F non diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ $\qquad \chi_F = (X-1)(X-j)(X-\bar{j})$

scindé simple sur $\mathbb{C}$ donc F diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

Posons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & \bar{j} \end{pmatrix}$

- Recherche de $E_1(F)$

$\underline{\text{Oh!}}$ $F\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

or $\dim E_1(F)=1$ car $m(1)=1$

donc $E_1(F)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$F\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}j\\j^2\\1\end{pmatrix}=j\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}$$

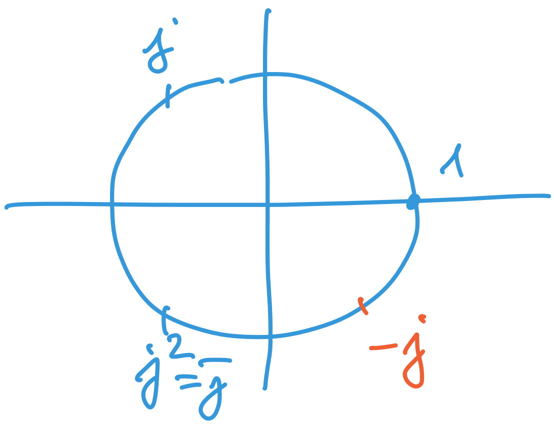
donc $E_j(F)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}$

et donc $E_{j^2}(F)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}$

$Z\in E_j(F) \Leftrightarrow \overline{Z}\in E_{\overline{j}}(F)$

car $F\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

et $j^2=\overline{j}$



Proposition. Soit A diagonale ou triangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \spadesuit & \cdots & \cdots & \spadesuit \\ 0 & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \spadesuit \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii})$$

Corollaire. Les valeurs propres d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire, sont les coefficients diagonaux de la matrice.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-a_{11} & * & * & * \\ & X-a_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & X-a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$= \text{prod des coeff diag}$$

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii})$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & * & \\ 0 & 2 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(X) = (X-2)^2 (X-1)\, X$$

$$Sp(A) = \{2, 1, 0\}$$

$$= \cancel{\{2, 2, 1, 0\}}$$

4.2 Multiplicité, propriétés

Définition. On dit que λ est valeur propre de A **de multiplicité** m lorsque λ est racine de multiplicité m de χ_A.

Proposition. Un matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus n valeurs propres, comptées avec multiplicité.

Proposition. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le nombre de valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, comptées avec multiplicité, est n.

On note m_λ la multiplicité de λ

pour χ_A, $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(A)} m_\lambda \leq \deg(\chi_A) = n$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

χ_A est scindé ~~scindable~~

donc $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(A)} m_\lambda = \deg \chi_A = n$

Proposition. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et n impair, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \varnothing$.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est valeur propre de A, alors $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre de A, avec même multiplicité.

Preuve: n impair

$$\chi_A = \det(XI_n - A)$$

$$f : \widetilde{\chi_A} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \det(tI_n - A) \\ & & = t^n - \mathrm{tr}(A)\, t^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A) \end{array}$$

pol. de degré impair

$$f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$$

$$f(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} -\infty$$

f est continue

par les val. intermédiaires : $\exists t_0$ tq $f(t_0) = 0$

Preuve: λ vp de A $\iff$ $\chi_A(\lambda) = 0$

$$\iff \overline{\chi_A(\lambda)} = \overline{0}$$

$$\iff \chi_A(\overline{\lambda}) = \overline{0}$$

car $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$

$\iff$ $\overline{\lambda}$ vp de A

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A et $A^\top$ ont le même polynôme caractéristique, et donc les mêmes valeurs propres.

Prop ~~**Remarque.**~~ *A et $A^\top$ ont les mêmes valeurs propres, mais pas les mêmes vecteurs propres. On peut cependant montrer que, pour λ valeur propre, $E_\lambda(A)$ et $E_\lambda(A^\top)$ ont la même dimension.*

$$Sp(A) = Sp(A^T)$$

$$\text{et } \dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(A^T)$$

Preuve:
$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$
$$= \det\left((XI_n - A)^T\right)$$
$$= \det(XI_n - A^T)$$
$$= \chi_{A^T}(X)$$

donc les vp de A et A^T sont les mêmes,

et mêmes multiplicités.

Preuve: $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$

$$\dim E_\lambda(A) = \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$$
$$= n - rg(A - \lambda I_n)$$
$$= n - rg\left((A - \lambda I_n)^T\right)$$
$$= n - rg(A^T - \lambda I_n)$$
$$= \dim E_\lambda(A^T)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & & \mathcal{L}(E) \\ A & \xleftrightarrow{\mathcal{B}} & u \\ A^T & \longleftrightarrow & ? \end{array}$$

4.3 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Proposition. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **polynôme caractéristique de** u le polynôme caractéristique de toute matrice représentant u dans une base.

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & & \mathcal{L}(E) & & \\
A & \xleftrightarrow{\ \mathcal{B}\ } & u & \xleftrightarrow{\ \mathcal{E}\ } & B \\
\chi_A(X) & = & \chi_u(X) & & \chi_B(X)
\end{array}
$$

$$A = PBP^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det(XI_n - A) \\
&= \det(XI_n - PBP^{-1}) \\
&= \det(P(XI_n - B)P^{-1}) \\
&= \det P \cdot \chi_B(X) \det P^{-1} \\
&= \chi_B(X)
\end{aligned}
$$

Remarque : Si E de dim infinie, pas question de parler de pol. caractéristique !!

4.4 Polynôme caractéristique et sous-espace stable

Lemme. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On note u_F l'endomorphisme induit par u sur F.
Alors χ_{u_F} divise χ_u.

$u : E \longrightarrow E$ $\qquad n = \dim E$

$\deg \chi_u = n$

$\forall x \in F \quad u(x) \in F$

$u_F : F \longrightarrow F$ endom. induit

$x \longmapsto u(x)$

$p = \dim F \leq n$

$\deg \chi_{u_F} = p$

Soit $\mathcal{B}$ base de E adaptée à F.

ie $\mathcal{B} = (\underbrace{f_1, \dots, f_p}_{\text{base de } F}, e_{p+1}, \dots e_n)$ base de E

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline O & D \end{array}\right) \text{ par blocs}$$

car

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u(f_1) & \dots & u(f_p) & u(e_{p+1}) & \dots & u(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & O & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} & * \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

$u(f_1) \in F = \mathrm{Vect}(f_1 \dots f_p)$

où $\quad B = \mathrm{Mat}\left(u_F, (f_1 \dots f_p)\right)$

$u_F(f_j) = u(f_j)$

car $\quad \mathrm{Mat}(u_F, (f_1 \dots f_p)) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} u(f_1) & \dots & u(f_p) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{matrix} \end{array}$

$$\chi_u(X) = \det \left(\begin{array}{c|c} XI_p - B & -C \\ \hline 0 & XI_{n-p} - D \end{array} \right)$$

$$= \det(XI_p - B) \times \det(XI_{n-p} - D)$$

(mat. triangulaire par blocs)

$$= \chi_{u_F}(X) \times \det(XI_{n-p} - D)$$

Théorème.

La dimension d'un sous-espace propre est au plus égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante :
Si $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et si $m(\lambda)$ désigne la multiplicité de λ, alors :

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda)$$

Le résultat se traduit aussi matriciellement.

Corollaire. Si λ est une valeur propre de multiplicité 1, alors le sous-espace propre associé est une droite vectorielle, c'est-à-dire est de dimension 1.

Preuve:

- Si λ vp de u,

  $u - \lambda \mathrm{Id}$ non injective

  donc $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\}$

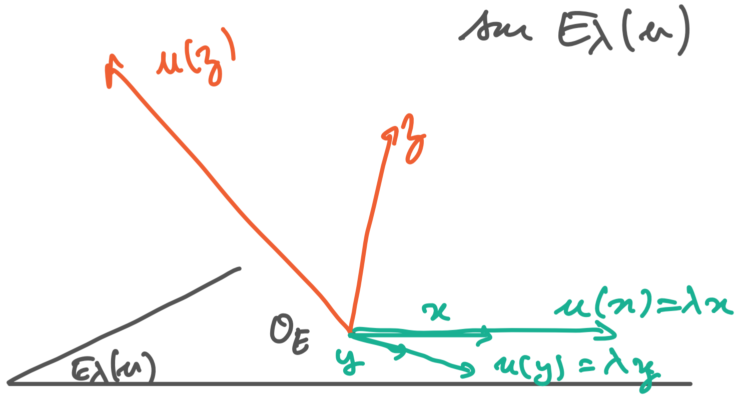
  donc $\dim E_\lambda(u) \geqslant 1$

  Besoin ! l'espace propre $E_\lambda(u)$ a au moins 1 direction propre

- Soit λ vp de u, de multiplicité $m(\lambda)$

  $E_\lambda(u)$ est stable par u besoin

  On note $u_{E_\lambda(u)} = u_\lambda$ l'endom induit par u sur $E_\lambda(u)$



$$u_\lambda = \lambda \, Id_{E_\lambda(u)}$$

car : $\forall x \in E_\lambda(u)$, $\quad u_\lambda(x) = u(x)$

$$= \lambda x \quad \text{car } x \in E_\lambda(u)$$

$$= \lambda \, Id(x)$$

$$\chi_{u_\lambda}(X) = \det\left(X \, Id_{E_\lambda(u)} - u_\lambda\right)$$

$$= \det\left((X-\lambda) \, Id_{E_\lambda(u)}\right)$$

$$= (X-\lambda)^p \qquad \text{où } p = \dim E_\lambda(u)$$

Par le lemme,

$$(X-\lambda)^p \mid \chi_u(X)$$

$$\chi_u(X) = (X-\lambda)^{m(\lambda)} \times Q$$

dont λ n'est pas racine

donc $p \leq m(\lambda)$

ie $\dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$

<u>Remarque</u> : on peut justifier plus directement ainsi :

Soit λ vp de u. $E_\lambda(u)$ stable par u. Dans une base adaptée à $E_\lambda(u)$:

$$\mathrm{Mat}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{matrix} & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_p & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

$$\chi_u(X) = \det \left(\begin{array}{c|c} XI_p - \lambda I_p & -B \\ \hline & XI_{n-p} - C \end{array}\right)$$

$$= (X - \lambda)^p \det(XI_{n-p} - C)$$

Corollaire. Si λ est une valeur propre de multiplicité 1, alors le sous-espace propre associé est une droite vectorielle, c'est-à-dire est de dimension 1.

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq 1$$

λ vp simple $\longrightarrow$ associée à une droite vecto propre.

5 Diagonalisabilité

5.1 Diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ soit diagonale.
Cela revient à dire qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

$$\mathrm{Mat}(u, (e_1 \dots e_n)) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & \cdots & u(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ \\ e_n \end{array} \end{array}$$

Caractérisation.

Soit E espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si et seulement si E est somme (directe) des sous-espaces propres de u :

$$u \text{ diagonalisable} \iff \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E$$
$$\iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\left(E_\lambda(u)\right) = n$$

Preuve:

$$u \text{ diagonalisable} \iff \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$

On considère une base $\mathcal{B}$ de E adaptée à cette somme directe.

(ie $\mathcal{B}$ est la concaténation de bases de chq $E_\lambda(u)$)

$\mathcal{B}$ est constituée de vecteurs qui sont dans un $E_\lambda(u)$, donc qui sont des vecteurs propres.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose u diagonalisable.

On note $\mathcal{B}$ une base de vecteurs propres de u.

Mq $\quad E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

- la somme est directe.
- $\boxed{\supset}$
- $\boxed{\subset}$ Soit $x \in E$

Dans la base $\mathcal{B}$: $\quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Or chaque $x_i e_i$ est dans un $E_\lambda(u)$

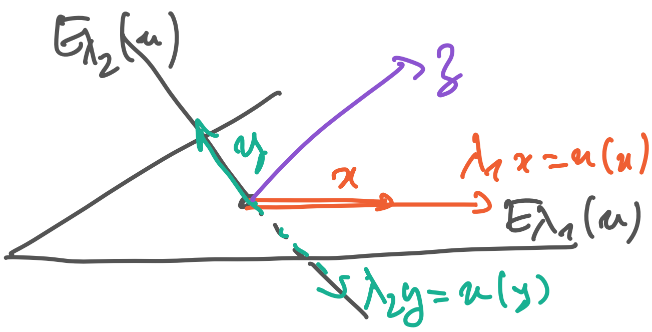
on écrit $\quad x = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ e_i \in E_\lambda(u)}}^{n} x_i e_i \right)$

$$\in \sum_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$$

<u>Dimension.</u> $\quad E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) \Leftrightarrow n = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u)$

La somme des $E_\lambda(u)$ est directe

donc $\quad \dim \left(\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) \right) = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u)$



Caractérisation.

Soit E espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si et seulement si

- χ_u est scindé
- chaque sous-espace propre a pour dimension la multiplicité de la valeur propre associée

Remarque. *Ça signifie que l'on peut écrire :*

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{m_i}, \quad \text{avec les } \lambda_i \text{ distincts}$$

et

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\},\ \dim\left(E_{\lambda_i}(u)\right) = m_i$$

Preuve:

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose u diagonalisable.

- Si χ_u non scindé,

$$\dim \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_\lambda(u))$$

$$\leq \sum_{\lambda \in Sp(u)} m(\lambda)$$

$$= \sum_{\lambda \in rac(\chi_u)} m(\lambda)$$

$$< \deg(\chi_u) \quad \text{si } \chi_u \text{ non scindé}$$

$$= n$$

donc u non diagonalisable.

- Si $\exists \lambda_0 \in Sp(u)$ tq $\dim E_{\lambda_0}(u) < m(\lambda_0)$

$$\dim \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u)$$

$$< \sum_{\lambda \in Sp(u)} m(\lambda)$$

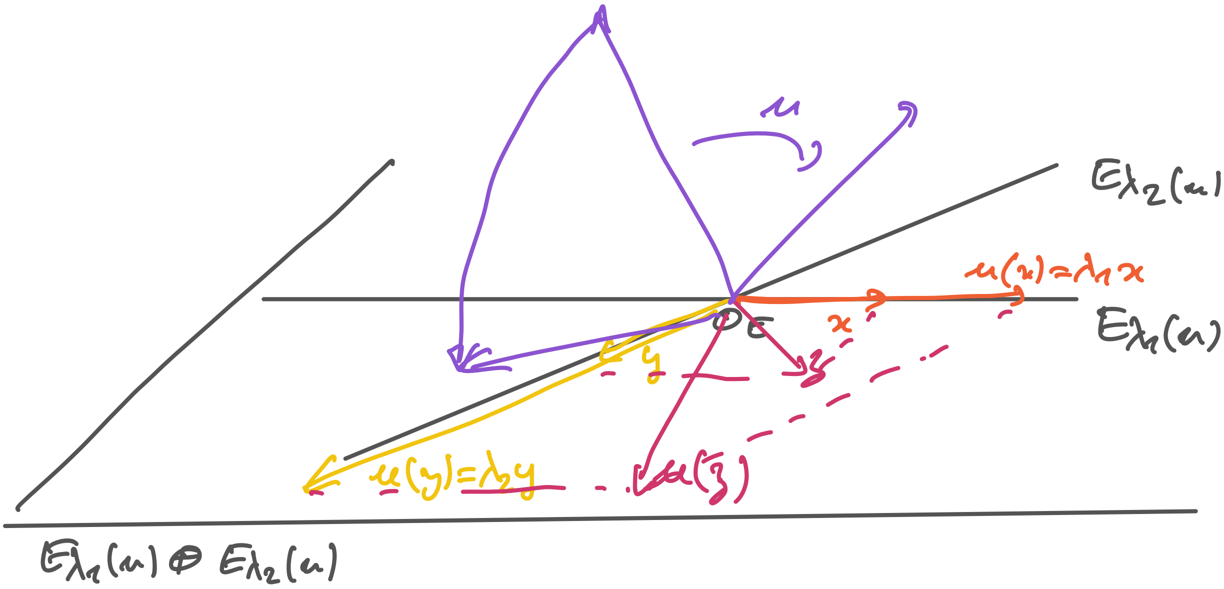
$< n = \dim E$

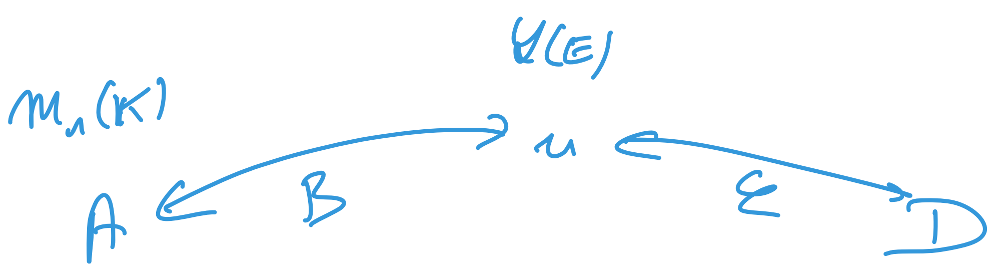
donc u non diagonalisable.

Corollaire. Soit E espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable. Et ses sous-espace propres sont des droites vectorielles.

Remarque. *C'est bien une condition suffisante, non nécessaire.*

Preuve : directe.





5.2 Diagonalisabilité d'une matrice carrée

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **diagonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale :

$$\exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ diagonale}, \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ A = PDP^{-1}$$

Remarque. *Les coefficients de D sont les valeurs propres de A, avec multiplicité.*

Les propriétés vues pour les endomorphismes se traduisent matriciellement :

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ diagonalisable} &\iff \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A) = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ &\iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\big(E_\lambda(A)\big) = n \\ &\iff \begin{cases} \chi_A \text{ est scindé} \\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \dim\big(E_\lambda(A)\big) = m(\lambda) \end{cases} \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\chi_A \text{ est scindé à racines simples} \overset{\text{CS}}{\implies} A \text{ diagonalisable} \qquad \cancel{\text{CNS}}$$

Enfin, si $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$,

$$A \text{ est diagonalisable} \iff u \text{ diagonalisable}$$

Remarque. *Diagonaliser A, c'est trouver une matrice de passage P et une matrice D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$. Sauf si c'est demandé, on ne calcule pas P^{-1}.*

Proposition. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A \text{ diagonalisable} \iff A^\top \text{ diagonalisable}$$

$$A \text{ diagonalisable} \iff n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \underbrace{\dim E_\lambda(A)}_{= \dim E_\lambda(A^T)}$$

$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^T)$

$$\iff n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A^T)} \dim E_\lambda(A^T)$$

$$\iff A^T \text{ diagonalisable.}$$

Remarque : AX colonne $\qquad u(x)$

transposée : $X^T A^T$ ligne

5.3 Le théorème spectral

On démontrera et on complètera plus tard le résultat suivant :

Proposition. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique à coefficients réels, alors A est diagonalisable.

CS

(~~pas CNS~~)

⚠ symétrique réelle

5.4 Des exemples

Exemple. Diagonaliser $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrice pleine de 1.

M1

$$\chi_J(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & & -1 \\ -1 & X-1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -1 & \dots & & X-1 \end{vmatrix}$$

matrice "circulante"

$C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$

$$= (X-n) \begin{vmatrix} 1 & -1 & & -1 \\ 1 & X-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$L_i \leftarrow L_i - L_1 \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}$

$$= (X-n) \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & X & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & (0) & & \\ 0 & & & X \end{vmatrix}$$

$$= (X-n) X^{n-1}$$

Donc $Sp(J) = \{0, n\}$

0 vp de mult. $n-1$

n vp simple

Recherche de $E_n(J)$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_n(J) \iff JX = nX$$

$$\iff \begin{cases} (1-n)x_1 + \dots + x_n = 0 \\ \vdots \\ \dots \end{cases}$$

$$\iff \dots$$

$\dim E_n(J) = 1$ car n vp simple de J

Or! $J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in E_n(J)$

donc $E_n(J) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Recherche de $E_0(J)$

$$X\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_0(J) \iff JX = 0$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + \dots + x_n = 0 \\ \vdots \\ x_1 + \dots + x_n = 0 \end{cases}$$

$$\iff \{ x_1 + \dots + x_n = 0$$

$$\iff X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

donc $E_0(J) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

- <u>Conclusion :</u>

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})) & \\
J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{can.}"] & u : X \mapsto JX \arrow[r, leftrightarrow, "\mathcal{B}"] & D = \begin{pmatrix} n & & (0) \\ & 0 & \\ (0) & & \ddots & 0 \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{B}$: famille des vecteurs propres de u / de J

$$P = \mathrm{Pass}(\mathrm{can}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \text{vecteurs de } \mathcal{B} \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{\mathrm{can}}$$

$= $ concaténation des vecteurs propres de J

$$= \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccc} V_n & U_1 & U_2 & & U_{n-1} & \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \cdots \\ \\ \ddots \\ \\ \ddots \end{array} & \left.\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ \\ E_n \end{array} \end{array}$$

Ainsi $J = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} n & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$

et P ci-dessus.

Méthode 2

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : $rg(J) = 1$ car $C_1 = C_2 = \cdots = C_n$

$\mathrm{Im}\, J = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\dim \underbrace{\mathrm{Ker}\, J}_{E_0(J)} = n - 1$

$C_1 - C_2 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, J = E_0(J)$

$\vdots$

$C_1 - C_n = 0$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, J = E_0(J)$

On a trouvé $(n-1)$ vecteurs indépendants (échelonnés)

dans $E_0(J)$ de dim $(n-1)$

donc $E_0(J) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

- Or ! $J\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

donc n v.p. $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in E_n(J)$

or $\dim E_0(J) + \dim E_n(J) \leq n$

donc $E_n(J) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Exemple. Diagonaliser $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i = j \\ \beta & \text{sinon} \end{cases}$

Exemple. On considère $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base de $\operatorname{Ker} B$ et une base de $\operatorname{Im} B$. Puis montrer que B est $\underbrace{\text{diagonalisable}}_{\text{Th spectral}}$.

$\operatorname{Im} B = \operatorname{Vect}(\text{colonnes})$

$= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ de dim 2

Donc par le th du rang $\operatorname{Ker} B$ de dim $n-2$

contient $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(n-2)$ vecteurs indépendants

donc $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$= E_0(B)$ $\quad$ 0 vp de B

$m(0) \geq \dim E_0(B) = n-2$

On note λ, μ les 2 autres vp (éventuellement $\lambda = \mu$)
éventuellement 0

Th spectral, B diagonalisable
semblable à $\begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \lambda & \\ 0 & & & & \mu \end{pmatrix} = D$

$\operatorname{tr}(B) = 1 = \lambda + \mu$

Calculons :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} C_n & & C_n & C_1+C_2\cdots+C_n \end{array} \\ B^2 = & \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= PD^2P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ 0 & & \lambda^2 & \\ & & & \mu^2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\operatorname{tr} B^2 = n-1+n = \lambda^2+\mu^2$$

$$\lambda\mu = \frac{1}{2}\left((\lambda+\mu)^2 - (\lambda^2+\mu^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - (2n-1)\right)$$

$$= 1-n$$

Bref on cherche λ et μ tq $\begin{cases} \lambda+\mu = 1 \\ \lambda\mu = 1-n \end{cases}$

Ce sont les racines de $X^2 - X + (1-n)$

$$\Delta = 1-4(1-n)$$

$$= 4n-3$$

donc $\lambda, \mu = \dfrac{1 \pm \sqrt{4n-3}}{2}$