

Pour en : DS ♥

Pour je : 240.1, 240.3

Diagonalisation

Je me souviens

1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, quel est l'endomorphisme canoniquement associé ?
2. Que signifie : « $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe » ?

1] C'est l'endon. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ base canonique $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots$
 $E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

C'est $\alpha: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$X \mapsto AX$$

on a c'est l'endon. de $\mathbb{K}^n$ base canonique $e_1 = (1, \dots, 0)$
 $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$
 $\vdots$
 $e_n = (0, \dots, 0, 1)$

$$\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \quad \text{et} \quad \text{Mat}(\alpha, \text{can}) = A$$

2 $F_1 \dots F_p$ sind an einem dicken Punkt:

$$\forall (x_1 \dots x_p) \in F_1 x \dots x F_p$$

$$x_1 + \dots + x_p = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_p = 0 \end{array}$$



1 Éléments propres d'un endomorphisme

1.1 Définition

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est **valeur propre** de u lorsqu'il existe x non nul tel que :

$$u(x) = \lambda x$$

$$u(x) - \lambda x = 0$$

On dit alors que x est **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ .

$$(u - \lambda \text{Id})(x) = 0$$

Remarque. Insistons : il faut qu'il existe un vecteur **non nul** tel que...

Remarque. Un vecteur propre, c'est un vecteur non nul tel que $u(x)$ est colinéaire à x .

Définition. On appelle **équation aux éléments propres** l'équation :

$$u(x) = \lambda x$$

où l'on cherche les valeurs de λ pour lesquelles il existe des solutions x non nuls à l'équation, et on cherche ces solutions aussi.

Définition. Si λ est une valeur propre de u , on appelle **sous-espace propre associé à λ** l'espace :

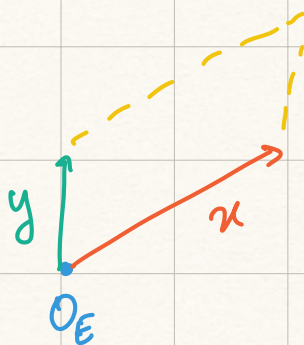
$$\begin{aligned} E_\lambda(u) &= \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \\ &= \{x \in E, u(x) = \lambda x\} \end{aligned}$$

E est un $\mathbb{K}$

$u \in \mathcal{L}(E)$

$u: E \longrightarrow E$

$x \longmapsto u(x)$



$$u(\vec{n}) = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{K}} \vec{n} \quad ?$$

1.2 Propriétés

Proposition. x est un vecteur propre de u si et seulement si la droite vectorielle $\text{Vect}(x)$ est stable par u .

$\Rightarrow$ Soit x vecteur propre de u

ie $x \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $u(x) = \lambda x$

On note $D = \text{Vect}(x)$

$$u(x) = \lambda x$$

$$\in D$$

$\text{Vect}(x)$ est stable par u .

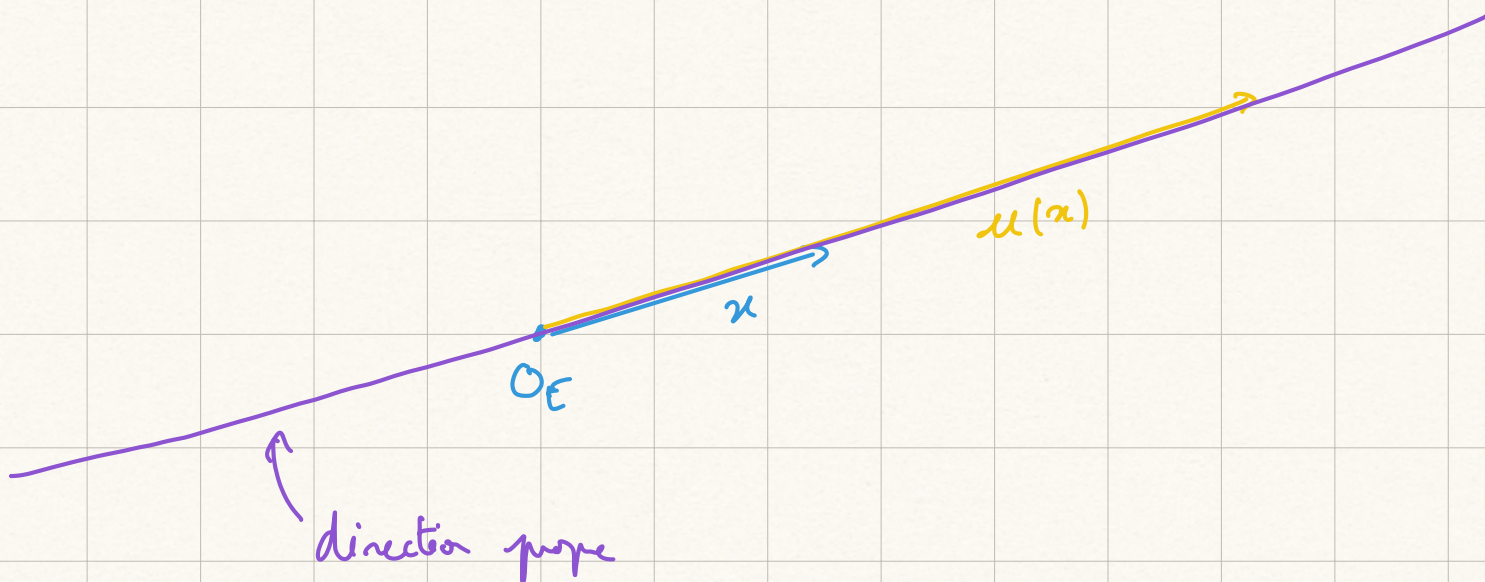
$\Leftarrow$ On suppose D stable par u

où $D = \text{Vect}(x)$, $x \neq 0$

Donc $u(x) \in D$

ie $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $u(x) = \lambda x$

donc x est vecteur propre de u .



Théorème.

Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
Plus précisément : si E est un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, et si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u , alors la somme $E_{\lambda_1}(u) + \dots + E_{\lambda_p}(u)$ est directe. On l'écrit donc :

$$E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}(u) \quad \text{ou encore} \quad \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}(u)$$

Preuve: Montrons le résultat par récurrence sur p .

- Si λ_1 vp de u , $E_{\lambda_1}(u)$ est en somme directe.

Ben oui $x=0 \Rightarrow x=0$

- Soit $p \geq 1$. On suppose que, si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des vp distinctes, $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}$ des vp distinctes de u .

Soit $x_1, \dots, x_p, x_{p+1}$ dans $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}, E_{\lambda_{p+1}}$ resp

$$\text{tg } x_1 + \dots + x_p + x_{p+1} = 0 \quad (1)$$

On a donc

$$u(x_1) + \dots + u(x_p) + u(x_{p+1}) = 0$$

$$\text{ie } \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p + \lambda_{p+1} x_{p+1} = 0 \quad (2)$$

$$(2) - \lambda_{p+1} (1)$$

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{p+1}) x_1 + \dots + (\lambda_p - \lambda_{p+1}) x_p}_{\in E_{\lambda_1}(u)} = 0$$

par HR, $E_{\lambda_1}(u) \dots E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe

$$\text{donc } \begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_{p+1}) x_1 = 0 \\ \vdots \\ (\lambda_p - \lambda_{p+1}) x_p = 0 \end{cases}$$

or les λ_k sont distincts donc $x_1 = \dots = x_p = 0$

Il reste $x_{p+1} = 0$

• La propriété est vraie pour tout p .

Remarque: § 6.1.

Théorème.

Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Plus précisément : si E est un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, et si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres λ_i deux à deux distinctes, alors $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

Corollaire. Si E est de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u admet au plus n valeurs propres distinctes.

Preuve: Soit $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs propres
associés aux vp $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ respectivement.

Soit $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tq $\underbrace{\mu_1 x_1 + \dots + \mu_p x_p}_{\in E_{\lambda_1}} = 0$

Comme les E_{λ_i} sont en somme directe

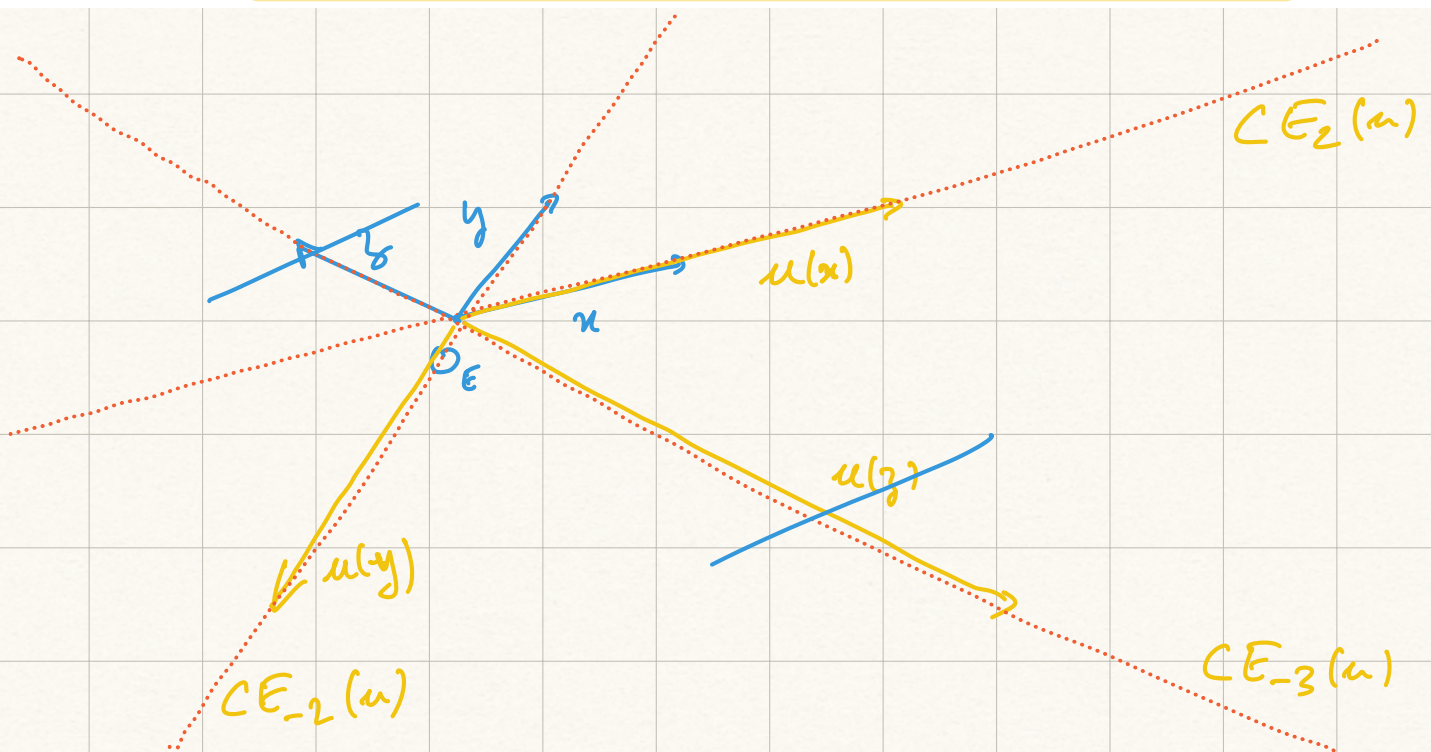
$$\mu_1 x_1 = 0 \dots \mu_p x_p = 0$$

or les x_i sont des vecteurs propres, donc non nuls

$$\text{donc } \mu_1 = 0 \dots \mu_p = 0$$

Ainsi: $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

Corollaire. Si E est de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u admet au plus n valeurs propres distinctes.



$$n = \dim(E)$$

donc les familles libres ont au plus n éléments

donc il y a au plus n valeurs propres distinctes.

Remarque: si $\dim E$ infinie, pas de résultat.

Proposition. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$, avec $u \circ v = v \circ u$. Alors :

- Tout sous-espace propre de u est stable par v
- $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont stables par v

↗ $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ stable par v

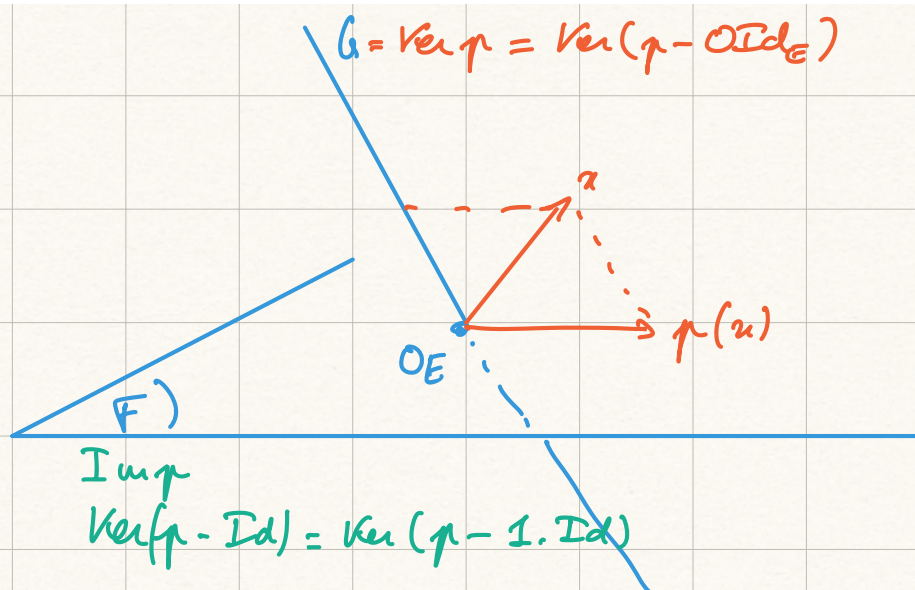
Remq : à savoir montrer

1.3 Exemples

Exemple. Soit E un espace vectoriel. Déterminer les éléments propres de :

1. p projecteur de E
2. s symétrie de E
3. h homothétie de rapport k

①

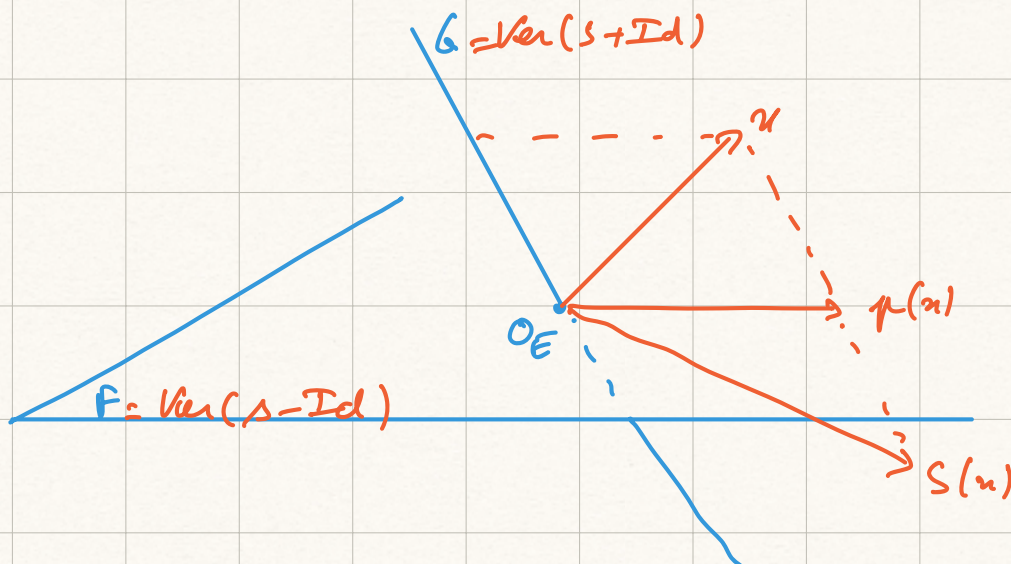


$$E = \text{Ker}(p - 0\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(p - 1 \cdot \text{Id})$$

donc 0 et 1 sont vp de p , les espaces propres associés sont G et F respectivement.

D'autres vp? Non! Sinon, $E_0(p) \oplus E_1(p) \oplus E_\lambda(p)$
 — mais pas assez de place!

②



s a 2 vp: 1 et -1, les espaces propres sont F et G .

Exemple. Déterminer les éléments propres de :

1. $u : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$
 $P \mapsto P'$
2. $v : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
 $f \mapsto f'$

① Éq aux éléments propres $P' = \lambda P$

1^{er} cas : $\lambda = 0$

l'éq aux éléments propres devient $P' = 0$
dont les sol sont $\mathbb{K}_0[X]$

Ainsi : 0 est v.p.

$$E_0(u) = \mathbb{K}_0[X]$$

2^e cas : $\lambda \neq 0$

Si $P \neq 0$ est sol de $P' = \lambda P$

alors $\deg(P') = \deg(P)$

$\rightarrow$ impossible

Ainsi : tout $\lambda \neq 0$ n'est pas v.p. de u .

$$\text{Sp}(u) = \{0\}$$

Spektrum de u
= ens. des v.p. de u

$$(2) \quad E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

eq aux éléments propres $f' = \lambda f$

(on cherche les cond sur λ pour qu'il existe
des sol non nulles)

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad y' = \lambda y$ se résout en

$$y(x) = A e^{\lambda x} \quad \text{où } A \in \mathbb{R}$$

Donc λ est vp de v

$$\text{et } E_\lambda(v) = \text{Vect}(x \mapsto e^{\lambda x})$$

$$\text{Donc } Sp(v) = \mathbb{R}$$

Exemple. Donner un exemple simple d'endomorphisme du plan euclidien usuel qui n'a aucune valeur propre.

1.4 En dimension finie

Remarque. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \iff \exists x \neq 0_E, u(x) = \lambda x$$

$$\iff \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$$

$$\iff u - \lambda \text{Id}_E \text{ non injective}$$

$$\iff u - \lambda \text{Id}_E \text{ non bijective}$$

car u endomorphisme de E qui est de dimension finie.

$$\iff \det(u - \lambda \text{Id}_E) = 0$$

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **spectre de u** :

$$\text{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K}, u - \lambda \text{Id}_E \notin \text{GL}(E)\}$$

$$= \{\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \text{ valeur propre de } u\}$$

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$u \in \text{GL}(E) \iff 0 \notin \text{Sp}(u)$$

$$\lambda \text{ vp de } A \iff \det(A - \lambda I_n) = 0$$

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

$$= (-1)^n \det(A - \lambda I_n)$$

$$\lambda \text{ vp de } A \text{ ssi } \lambda \text{ racine de } \chi_A$$

2 Éléments propres d'une matrice carrée

2.1 Définition

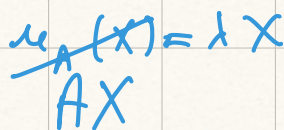
Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les éléments propres de A sont les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ qui lui est canoniquement associé :

$$\begin{aligned} u_A : \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

Ainsi, λ est une **valeur propre de A** s'il existe une matrice colonne non nulle X telle que $AX = \lambda X$. On dit alors que X est un **vecteur propre de A , associé à λ** . L'espace $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$ est l'**espace propre associé à λ** , et l'équation :

$$AX = \lambda X$$

est l'**équation aux éléments propres**. Le **spectre de A** , noté $\text{Sp}(A)$, est l'ensemble des valeurs propres de A .



$u_A(X) = \lambda X$
 AX

2.2 Critère d'inversibilité

Proposition. Avec les notations de la définition :

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff 0 \notin \text{Sp}(A)$$

2.3 Un mot sur le corps de base

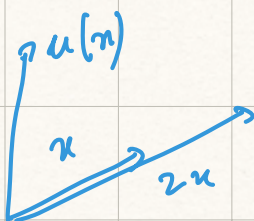
Remarque. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On peut donc chercher les valeurs propres réelles ou les valeurs propres complexes de A . On note $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et on a :

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$$

Exemple. Déterminer les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition. Plus généralement, si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{K}'}(A)$.

E est sur $\mathbb{R}$
 ~~E est sur $\mathbb{C}$~~
 $2x$



$$u \in \mathcal{U}(E)$$

$$u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

$$u_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

$$Z \mapsto AZ$$

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$$

Recherche des vp réelles de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Éq aux éléments propres:

$$AX = \lambda X \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \neq 0$$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda x - y = 0 \\ 1x - \lambda y = 0 \end{cases}$$

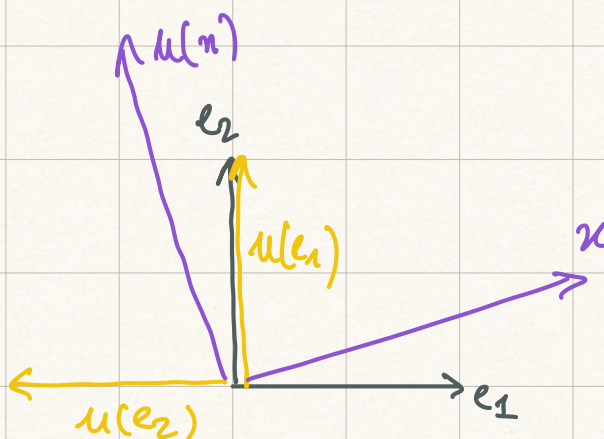
$$\Rightarrow \begin{cases} -(1+\lambda^2)y = 0 \\ x - \lambda y = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \lambda y = 0 \\ \underbrace{-(1+\lambda^2)}_{\substack{\geq 1 \\ \neq 0}} y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } S_p(A)_{\mathbb{R}} = \emptyset$$

(Et pourquoi ? $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$)
 représente $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$



$$u(x) = \lambda x$$

Recherche les vp complexes de A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$$

l'éq aux éléments propres :

$$AX = \lambda X \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{C}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{C}) \\ \neq 0$$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x - \lambda y = 0 \\ (1 + \lambda^2)y = 0 \end{cases}$$

1^{er} cas : $1 + \lambda^2 \neq 0$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2^e cas : $\lambda = i$

$$AX = iX \Leftrightarrow x - iy = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Vect} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc i est vp et $E_i(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

3^e cas : $\lambda = -i$

$$AX = -iX \Leftrightarrow \overline{AX} = i\overline{X}$$

$$\Leftrightarrow A\overline{X} = i\overline{X}$$

$$\text{car } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) !$$

$$\Leftrightarrow \overline{X} \in E_i(A)$$

$$\text{Donc } -i \text{ v.p de } A \text{ et } E_{-i}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{Ainsi:}} \quad \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{i, -i\}$$

3 Éléments propres d'une matrice carrée représentant un endomorphisme

3.1 Lien entre matrice et endomorphisme

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B}$ une base de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$.

- Les valeurs propres de A sont les valeurs propres de u :

$$\text{Sp}(A) = \text{Sp}(u)$$

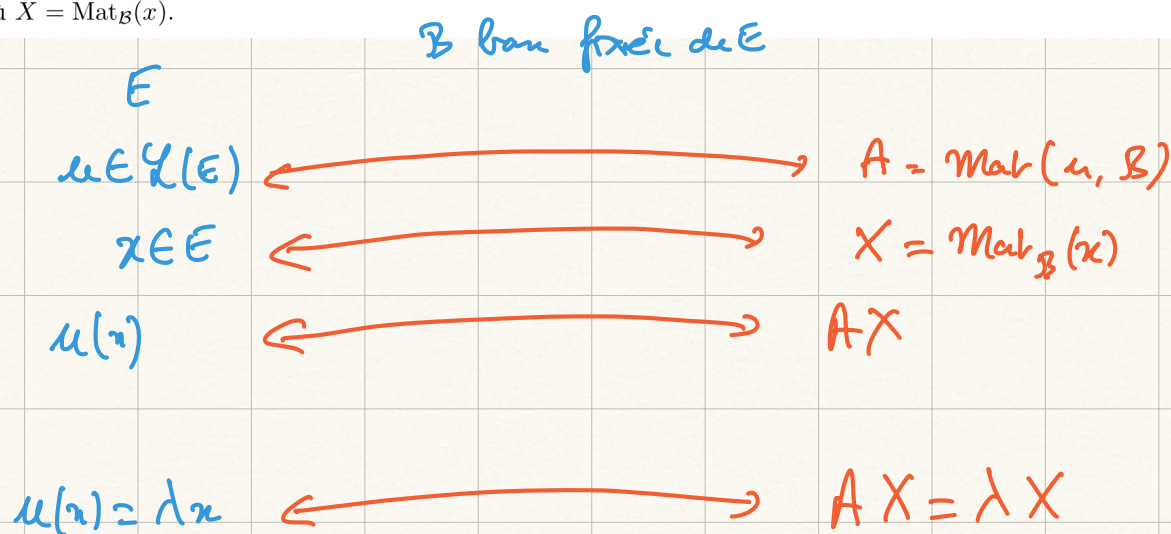
- Les vecteurs propres de A sont les matrices des vecteurs propres de u :

$$X \in E_\lambda(A) \iff AX = \lambda X$$

$$\iff u(x) = \lambda x$$

$$\iff x \in E_\lambda(u)$$

où $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.



3.2 Éléments propres et matrices semblables

Proposition. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables, $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

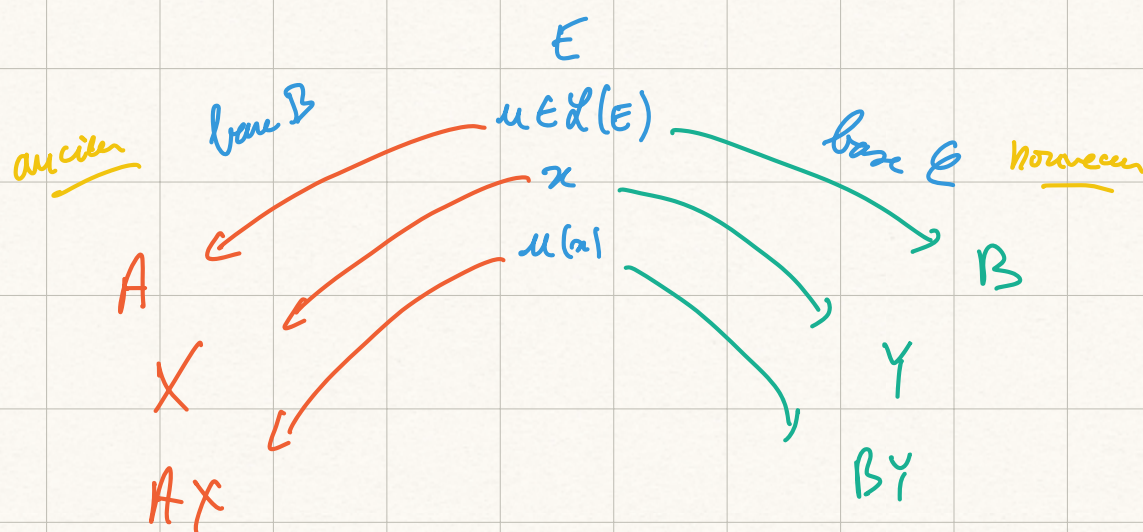
- Les valeurs propres de A sont les valeurs propres de B :

$$\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$$

- Les vecteurs propres de A et les vecteurs propres de B sont liés par la formule de changement de base :

$$\begin{aligned} X \in E_\lambda(A) &\iff AX = \lambda X \\ &\iff PBP^{-1}X = \lambda X \\ &\iff B(P^{-1}X) = \lambda(P^{-1}X) \\ &\iff P^{-1}X \in E_\lambda(B) \end{aligned}$$

$X \mapsto P^{-1}X$ est un isomorphisme de $E_\lambda(A) \rightarrow E_\lambda(B)$.



$$P = \text{lan}(B \rightarrow B') = \text{Mat}_B(B')$$

$$A = PBP^{-1}$$

$$X = PY$$

$$X \neq 0 \quad X \text{ vecteur propre de } A \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \quad AX = \lambda X$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \quad \mu(x) = \lambda x \quad \text{où } X = \text{Mat}(x, B)$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \quad BY = \lambda Y \quad \text{où } Y = \text{Mat}(x, B')$$

$$\iff Y = P^{-1}X \text{ vecteur propre de } B$$

Outil réservé à la dim finie.

Outil commode, pas exclusif. Ne pas oublier
liq aux éléments propres.

4 Polynôme caractéristique

4.1 Polynôme caractéristique d'une matrice

Définition. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit :

$$\chi_A = \det(XI_n - A) \in \mathbb{K}[X]$$

appelé le **polynôme caractéristique** de A .

$\alpha \beta \gamma \zeta \xi \chi$

Prug. Dans certains ouvrages : ~~$\chi_A = \det(A - XI_n)$~~

Proposition. χ_A est de degré n et on connaît *a priori* quelques coefficients :

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = X^n - \operatorname{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X-a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & \dots & \dots & X-a_{nn} \end{vmatrix}$$

Cas où A triangulaire

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ & X-a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & X-a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (X-a_{11})(X-a_{22}) \dots (X-a_{nn}) \end{aligned}$$

$$= X^m + (-a_{11} - a_{22} \dots - a_{nn}) X^{m-1} + \dots + (-1)^n a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

$$= X^m - \text{tr}(A) X^{m-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

Preuve: On note $E_1 \dots E_n$ la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$

$$A = (A_1 | \dots | A_n) \text{ par colonnes.}$$

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(XI_n - A) \\ &= \det(XE_1 - A_1 \mid XE_2 - A_2 \mid \dots \mid XE_n - A_n) \\ &\quad \text{on développe par multilinéarité.} \\ &= X \det(E_1 \mid XE_2 - A_2 \mid \dots \mid XE_n - A_n) \\ &\quad - \det(A_1 \mid XE_2 - A_2 \mid \dots \mid XE_n - A_n) \\ &= [\dots] \end{aligned}$$

$$= 2^n \text{ termes}$$

$$\begin{aligned} &= X^n \det(\overbrace{E_1 \mid E_2 \mid \dots \mid E_n}^{I_n}) \\ &\quad - X^{n-1} \left(\sum_i \det(\overbrace{E_1 \mid E_2 \mid \dots \mid A_i \mid \dots \mid E_n}^?) \right) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (-1)^n \det(\overbrace{A_1 \mid A_2 \mid \dots \mid A_n}^A) \end{aligned}$$

$$\det(E_1 \dots A_i \dots E_n) = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & (0) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & (0) & & & \\ & & & a_{1i} & & \\ & & & a_{2i} & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & a_{ii} & & (0) \\ & & & \vdots & & \\ & & & a_{ni} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{vmatrix}$$