Pour moi : 230.1, 230.12

Déterminants

1 Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base

1.1 Déterminant dans une base

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $x_1, \dots, x_n$ n vecteurs, et on note $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Proposition. $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire alternée sur E. Elle est aussi antisymétrique.

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} e_i$$

§ 5.1, 5.2

Théorème de structure.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. L'espace des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

$$\begin{aligned}
\phi(x_1, \dots, x_n) &= \phi\Big(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} e_{i_n} \Big) \\
&= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in [\![1,n]\!]^n} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \phi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \\
&= \sum_{\sigma : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \phi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\
&\qquad \text{en posant } \sigma(k) = i_k \\
&= \sum_{\substack{\sigma : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!] \\ \sigma \text{ bijective}}} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \phi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\
&\qquad \text{car } \phi \text{ est alternée} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \varepsilon(\sigma) \phi(e_1, \dots, e_n) \\
&\qquad \text{car } \phi \text{ est antisymétrique} \\
&= \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \Big) \phi(e_1, \dots, e_n)
\end{aligned}$$

Théorème de structure.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base. Il existe une unique forme n-linéaire alternée ϕ sur E telle que $\phi(e_1, \dots, e_n) = 1$. Et toute forme n-linéaire alternée est de la forme $\lambda\phi$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

" Forme n-linéaire alternée antisymétrique "

Forme n-linéaire

$$\phi : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(x_1 \dots x_n) \longmapsto \phi(x_1 \dots x_n)$$

$\forall i$

$\forall x_1 \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_n \in E$

$\forall y, z \in E \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\phi(x_1 \dots x_{i-1}, \lambda y + \mu z, x_{i+1} \dots x_n)$$

$$= \lambda \phi(x_1 \dots x_{i-1}, y, x_{i+1} \dots x_n)$$

$$+ \mu \phi(x_1 \dots x_{i-1}, z, x_{i+1} \dots x_n)$$

ϕ est alternée

Si $x_i = x_j$, $i \neq j$ alors $\phi(x_1 \dots x_i \dots x_j \dots x_n) = 0$

Prop: { forme n-linéaires alternées } ev de dim 1.

ϕ est symétrique

$$\phi(x_1 \dots, x_i, \dots, x_j \dots x_n)$$

$$= \phi(x_1 \dots x_j, \dots x_i \dots x_n)$$

$(\mathfrak{S}_n, \circ)$ groupe engendré par les transpositions, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$

où τ transpose 2 éléments de $\{1 \dots n\}$.

$$\phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i)} \dots, x_{\sigma(n)})$$

$$= \phi(x_{\tau_1 \circ \dots \tau_k(1)}, \dots, x_{\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k(n)})$$

$$= \phi(x_{\tau_2 \circ \dots \circ \tau_k(1)}, \dots, x_{\tau_2 \circ \dots \circ \tau_k(n)})$$

car ϕ symétrique

$$= \dots$$

$$= \phi(x_1 \dots x_n)$$

<u>ϕ est antisymétrique</u>

$\forall i, j,\ i \neq j \quad \forall x_1 \dots x_n$

$$\phi(x_1 \dots x_i, \dots x_j, \dots x_n) = - \phi(x_1 \dots x_j \dots x_i \dots x_n)$$

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$\phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

$$= \phi(x_{\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k(1)} \dots x_{\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k(n)})$$

$$= - \phi(x_{\tau_2 \circ \dots \circ \tau_k(1)} \dots x_{\tau_2 \circ \dots \circ \tau_k(n)})$$

$$= \dots$$
$$= (-1)^{k} \phi(x_1 \dots x_n)$$
$$= \varepsilon(\sigma)\, \phi(x_1 \dots x_n)$$

<u>Prop.</u>

Soit ϕ n linéaire

ϕ alternée $\iff$ ϕ antisymétrique.

$$\det_{\mathcal{B}} : \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \end{array}$$

où x_j a pour coord $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$

$\det_{\mathcal{B}}$ est n-linéaire

alterné, antisymétrique

$\det_{\mathcal{B}}$ linéaire par rapport à chaque variable.

Si 2 variables sont égales, le $\det_{\mathcal{B}}$ s'annule.

1.2 Changement de base

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Alors, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \, \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \ldots, x_n)$$

Preuve par le th de structure.

1.3 Déterminant et indépendance linéaire

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \iff (x_1, \ldots, x_n) \text{ est liée}$$

Corollaire.

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \iff (x_1, \ldots, x_n) \text{ est une base de } E$$

2 Déterminant d'un endomorphisme

Définition. Soit u endomorphisme de E espace vectoriel de dimension n. Pour toute base $\mathcal{B}$ de E et toute famille $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$$

En particulier, en notant $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$:

$$\det(u) = \det_{(e_1,\ldots,e_n)}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$$

E de dim n. § 5.3

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$

on définit $\det(u)$

$$\det : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$u \longmapsto \det(u)$$

Ah bien ! $\phi : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$

$(x_1 \ldots x_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(u(x_1) \ldots u(x_n))$

ϕ est n-linéaire

(car u linéaire et $\det_{\mathcal{B}}$ n-linéaire)

et alternée

(car $\det_{\mathcal{B}}$ alternée)

donc $\phi \in \{$ forme n-linéaires alternées $\}$ thédestructure

$\mathrm{Vect}(\det_{\mathcal{B}})$

donc $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $\phi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$

On pose $\det(u) = \lambda$.

$\forall x_1 .. x_n \in E$

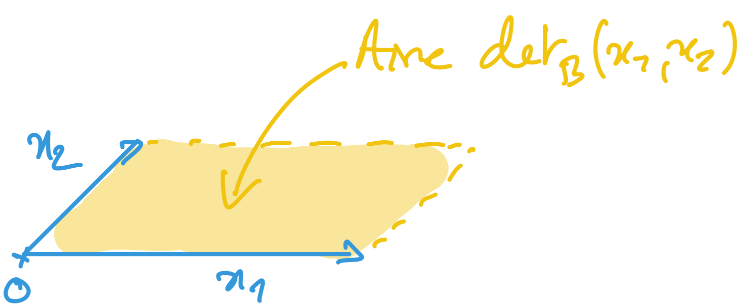
$$\underbrace{\det_B(u(x_1) \dots u(x_n))}_{\phi(x_1..x_n)} = \underbrace{\det(u)}_{\lambda} \det_B(x_1 .. x_n)$$

Rmq: Cette égalité définit $\det(u)$

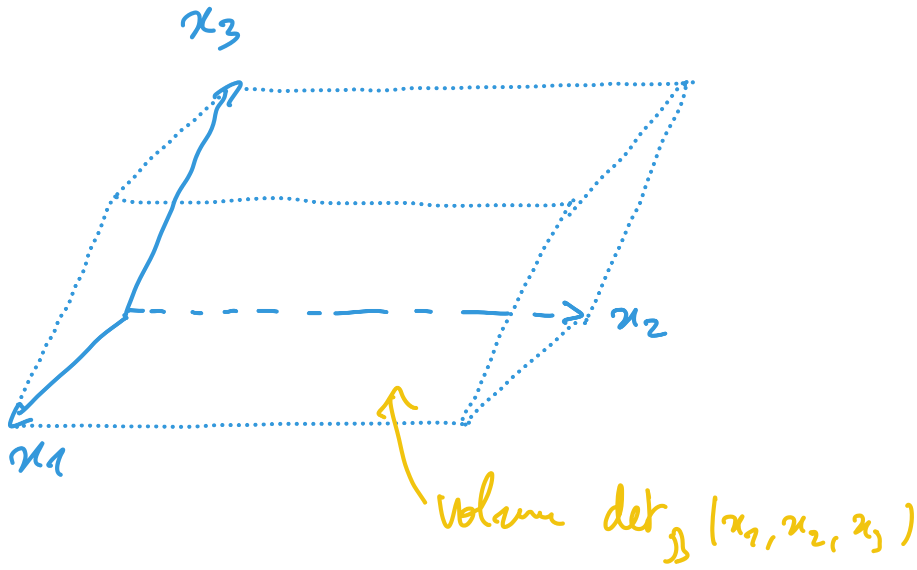
Rmq: en part avec $(x_1 .. x_n) = B$

$$\det_B(u(e_1) .. u(e_n)) = \det(u) \det_B(e_1 .. e_n)$$
$$= \det(u) . 1$$

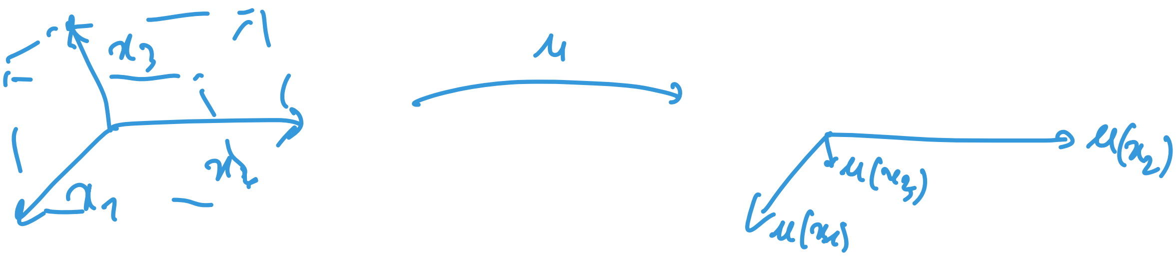
Rmq: en dim 2, le déterminant est l'aire du parallélogramme construit sur (x_1, x_2)



Rmq en dim 3, c'est le volume du parallélépipède construit sur x_1, x_2, x_3



$\det(u)$ = coeff multiplicateur des volumes.



$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3)$

$\det(u) \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3)$
$= 0$

informe sur l'injectivité de u.

Proposition.

- $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$
- $u \in \mathrm{GL}(E) \iff \det(u) \neq 0$ et $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$

dans ce cas.

$\mathcal{B}$ base fixée.

$\forall x_1 . x_n \in E$

$$\det_{\mathcal{B}}(u \circ v(x_1) \dots u \circ v(x_n))$$

$$= \det_{\mathcal{B}}(u(v(x_1)) \dots u(v(x_n)))$$

$$= \det(u) \times \det_{\mathcal{B}}(v(x_1) \dots v(x_n)) \quad \text{déf de } \det(u)$$

$$= \underbrace{\det(u) \times \det(v)} \det_{\mathcal{B}}(x_1 \dots x_n) \quad \text{" } \det(v)$$

$$= \underbrace{\qquad\qquad}_{\det(u \circ v)} \det_{\mathcal{B}}(x_1 \dots x_n)$$

$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

3 Déterminant d'une matrice carrée

Formule.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n}$$

Proposition. L'expression de $\det(A)$ est polynomiale en les coefficients de A.

Remarque. *C'est l'argument utilisé pour justifier la continuité de* $A \mapsto \det(A)$ *sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *lorsque* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Bien sûr, $A = \begin{array}{cc} u(e_1) \ldots u(e_n) & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \end{array}$

Proposition.

- Si A est la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B}$, alors $\det(A) = \det(u)$.
- Si A est la matrice de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de E dans la base $\mathcal{B}$, alors $\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$.
- A est la matrice de la famille de ses colonnes $(C_1, \ldots, C_n)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, donc $\det(A) = \det_{\text{base canonique}}(C_1, \ldots, C_n)$.

au sens du § 1.

Conséquence :

$$\det(A) = \det_{can}(C_1, \ldots, C_n)$$

forme n-linéaire alternée.

Proposition. Pour des matrices carrées, on a :

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- $\det(A^\top) = \det(A)$
- $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
- Deux matrices semblables ont le même déterminant

$$\det(\lambda A) = \det_{can}(\lambda C_1, \dots, \lambda C_n)$$
$$= \lambda \det_{can}(C_1, \lambda C_2, \dots, \lambda C_n)$$
$$= \lambda^n \det_{can}(C_1, \dots, C_n)$$
$$= \lambda^n \det(A)$$

n-linéarité

$$\det(3 I_n) = 3^n \cdot 1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 3 \end{vmatrix} = 3^n$$

$$\det(A^\top) = \det(A)$$

$$\det(A^\top) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a'_{\sigma(1)1} \cdots a'_{\sigma(n)n}$$

où $A^\top = (a'_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, \underbrace{a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}}_{\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}}$$

on réordonne le produit en posant $i = \sigma(j)$

$j = \sigma^{-1}(i)$

i parcourt $[\![1, n]\!] \Longleftrightarrow j$ parcourt $[\![1, n]\!]$

$$= \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)\, j}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \det(A)$$

et donc le det est n-linéaire alterné par rapport aux lignes de la matrice.

4 Calcul de déterminants

4.1 Développement par rapport à une ligne, à une colonne

Définition. Soit A une matrice carrée d'ordre n. Pour tout i, j, on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice carrée $(n-1)\times(n-1)$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A. On l'appelle le **mineur** associé à a_{ij}.
On appelle **cofacteur** de a_{ij} la quantité $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

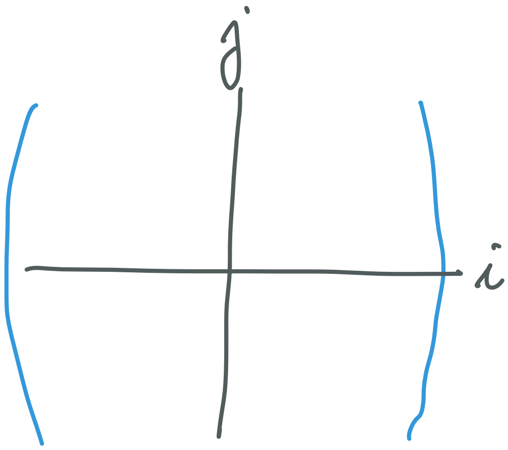
Théorème.

Le développement par rapport à la j-ème colonne est :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j}$$

Le développement par rapport à la i-ème ligne est :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j}$$

$A =$ 

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1\,j+1} & & a_{i-1\,n} \\ & \vdots & & & \vdots & \end{vmatrix} \quad \text{mineur}$$

$$\text{cofacteur}_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}$$

§ 5.4

Proposition.

$$A \times (\mathrm{Com}(A))^\top = (\mathrm{Com}(A))^\top \times A = \det(A)\ I_n$$

et donc, si $\det(A) \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\mathrm{Com}(A))^\top$$

4.2 Déterminant de matrices diagonales, triangulaire

Proposition. Si A est triangulaire (et donc si A est diagonale), $\det(A)$ est le produit des coefficients diagonaux :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Preuve:

M1 : Ben oui !

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$a_{\sigma(i)i} = 0$ dès que $\sigma(i) > i$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(i) \leq i \ \forall i}} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$\hookrightarrow \sigma = Id$

$$= \varepsilon(Id)\, a_{11} \cdots a_{nn}$$

Ben oui !

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

= somme de tous les produits formés de n termes pris dans chq colonne et chq ligne ($\times$ un signe)

M2 rec en développant par rapport à L_n

(à rédiger)

4.3 Opérations sur les lignes et les colonnes

Proposition.

- $C_i \leftrightarrow C_j$: échanger deux ~~lignes~~ colonnes multiplie le déterminant par -1
- $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, où $i \neq j$: ajouter à une ~~ligne~~ colonne une CL des autres ne modifie pas le déterminant
- $C_i \leftarrow \lambda C_i$, où $\lambda \neq 0$: multiplier une ~~ligne~~ colonne par λ multiplie le déterminant par λ. Mais on raisonne en pratique par égalité, en pensant qu'on factorise par λ dans la ~~ligne~~ colonne i.

$$\det(A) = \det_{can}(C_1, \dots, C_i, \dots C_j, \dots C_n)$$

$$= -\det_{can}(C_1 \dots, C_j, \dots C_i, \dots C_n)$$

par antisymétrie

$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$

$$\det_{can}(C_1 \dots, \dots, \underset{i}{C_i + \lambda C_j}, \dots, \underset{j}{C_j}, \dots, C_n) \qquad i \neq j$$

$$= \det_{can}(C_1, \dots, C_i, \dots C_j, \dots, C_n)$$

$$+ \lambda \det_{can}(C_1, \dots, C_j, \dots C_j, \dots, C_n)$$

par n-linéarité

$$= \det_{can}(C_1 \dots C_i, \dots C_j, \dots C_n) + 0$$

car alterné.

$C_i \leftarrow \lambda C_i$

$$\det_{can}(C_1, \dots, \lambda C_i, \dots, C_n)$$

$$= \lambda \det_{can}(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$$

car n-linéaire

4.4 Déterminants par blocs

Proposition. Soit A, C deux matrices carrées. On considère la matrice triangulaire par blocs définie par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det M = \det(A) \times \det(C)$$

Remarque :

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline E & C \end{array}\right) = \text{rien du tout}$$

B n'est même pas carrée

Preuve : $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ $\quad \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\quad \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ $\quad p+q=n$

(H1) ok !

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right)$$

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \det \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right)$$

or

$$\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & \underbrace{\begin{matrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{matrix}}_{q} \end{array}\right|_{[n]}$$

$$\underset{\text{dév } L_n}{=} (-1)^{n+n} \cdot 1 \left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{matrix} \end{array}\right|$$

$$= (-1)^{n+n} \, 1 . \left| \begin{array}{c:c} A & B_{q-1} \\ \hdashline 0 & I_{q-1} \end{array} \right|_{[n-1]}$$

$= [\cdots]$ par récurrence sur q.

$= \det(A)$

de même : $\det \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(C)$

CCl : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ \hdashline 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$

triang. par blocs.

M2 Soit $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$.

Soit $\phi : \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})^p \longrightarrow \mathbb{K}$

$$(C_1 \dots C_p) \longmapsto \det \left(\begin{array}{c:c:c:c} C_1 & \cdots & C_p & B \\ \hdashline \multicolumn{3}{c:}{0} & C \end{array} \right)$$

On remarque que ϕ est une forme p-linéaire alternée.

Donc, par le th de structure, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tq

$$\phi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$$

ie $\forall C_1 \dots C_p \quad \phi(C_1 \dots C_p) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(C_1 \dots C_p)$

en particulier pour $(C_1 \dots C_p) = \mathcal{B}$

$$\underbrace{\phi(E_1, \dots, E_p)}_{= \begin{vmatrix} I_p & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det(C)} = \lambda \cdot 1$$

donc $\lambda = \det(C)$ ie $\phi = \det(C) \det_{\mathcal{B}}$

donc en particulier avec $(C_1 \dots C_n)$ = colonne de A

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(C) \times \det_{\mathcal{B}}(\text{colonne de } A)$$
$$= \det(C) \det(A)$$

Proposition. Soit A une matrice triangulaire par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \spadesuit & \cdots & \cdots & \spadesuit \\ 0 & A_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \spadesuit \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det A = \det A_1 \det A_2 \ldots \det A_p$$

par réc sur p.

4.5 Déterminant de Vandermonde

Résultat. Pour $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{K}$, le **déterminant de Vandermonde** :

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

vaut :

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

Remarque. *Il faut comprendre qu'il s'agit d'un produit double :* $\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} (a_j - a_i)$.

Preuve: On cherche une rel. de récurrence

ie un lien entre $V(a_1 \ldots a_n)$ et $V(a_1 \ldots a_{n-1})$

op. sur lignes/colonnes et dév ligne/colonnes

$$V(a_1, \ldots a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

idée 1 : $C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \quad \cdots \quad C_n \leftarrow C_n - C_1$

→ ça semble compliqué.

idée 2 $L_2 \leftarrow L_2 - a_n L_1$

$L_3 \leftarrow \cancel{L_2 - a_n^2 L_1}$

$L_3 - a_n L_2$

$\vdots$

$L_n \leftarrow L_n - a_n L_{n-1}$

dans cet ordre

$$V(a_1 \dots a_n) \overset{(*)}{=} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 - a_n & & a_{n-1} - a_n & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} - a_n a_1^{n-3} & & a_{n-1}^{n-2} - a_n a_{n-1}^{n-3} & 0 \\ a_1^{n-1} - a_n a_1^{n-2} & & a_{n-1}^{n-1} - a_n a_{n-1}^{n-2} & 0 \end{vmatrix}$$

dev C_n

$$= (-1)^{1+n} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a_1 - a_n & & a_{n-1} - a_n \\ \vdots & & \vdots \\ \overbrace{a_1^{n-2} - a_n a_1^{n-3}}^{(a_1 - a_n) a_1^{n-3}} & & a_{n-1}^{n-2} - a_n a_{n-1}^{n-3} \\ \underbrace{a_1^{n-1} - a_n a_1^{n-2}}_{(a_1 - a_n) a_1^{n-2}} & & a_{n-1}^{n-1} - a_n a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

on factorise par $a_1 - a_n$ la colonne C_1
$\vdots \qquad \vdots$
$a_{n-1} - a_n$ —— C_{n-1}

$$= (-1)^{\overset{(-1)^{n-1}}{n+1}} (a_1 - a_n) \times \dots \times (a_{n-1} - a_n) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & & a_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \quad V(a_1 \dots a_{n-1})$$

Il reste à conclure par récurrence.