

pour je S40.2, S40.3, S40.4

pour lui, 7^h00: ex à rédiger
au choix

110. 16

110. 29*

S40.24

S40.25

$\sum f_n$

converge simplement



$\forall x \in I \quad \sum f_n(x) \text{ cv}$

converge normale



$\sum \|f_n\|_\infty \text{ cv}$

cv uniforme

$\left\{ \begin{array}{l} \text{cv simple} \\ (R_n)_n \text{ cv unif vers } 0 \end{array} \right.$

2 Régularité de la somme d'une série de fonctions

2.1 Transfert de continuité

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I .

Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur I (on note S sa somme),
- pour tout n , f_n est continue sur I ,

alors :

- S est continue sur I .

Raisonnement classique. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$, et si les f_n sont continues sur I , alors S est continue sur tout $[a, b] \subset I$ donc sur I .

Remarque. Ce résultat, qui exploite le caractère local de la continuité, s'adapte aussi lorsque la convergence uniforme est vérifiée sur une famille d'intervalles adaptés à la situation.

Exemple. On note $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Montrer que $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Preuve: On note $(S_n)_n$ la suite des sous-partiels

$$\forall x \in I, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

On a: $\left\{ \begin{array}{l} (S_n)_n \text{ cv uniformément vers } S \\ \text{les } S_n \text{ sont continues sur } I \text{ comme sommes finies (C.L.) de fct continues} \end{array} \right.$

Par transfert de continuité, S est continue sur I .

Exemple:

$$\bullet \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

• $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$

$$\text{ie } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum \frac{x^n}{n!} \text{ converge}$$

• Montrer que $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$:

Y a-t-il convergence uniforme ?

Y'a-t-il convergence normale ?

$$\left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq \dots \quad \text{indép de } n$$

↑
tg série cv

$$\frac{x^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\left\| x \mapsto \frac{x^n}{n!} \right\|_{\infty} \text{ n'existe pas}$$

ZUT !

Étude de cv unif

Étude locale

Sur tout $[-A, A] \subset \mathbb{R}$

$$\forall x \in [-A, A] \quad \left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq \frac{A^n}{n!} \quad \text{indép de } n$$

↑ tg série exp converge

$$\text{donc } \left\| x \mapsto \frac{x^n}{n!} \right\|_{\infty}^{[-A, A]} \leq \frac{A^n}{n!}$$

donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[-A, A]$

donc $\sum f_n$ converge uniformément sur $[-A, A]$

et les f_n sont continues

Donc la somme exp est continue sur tout $[-A, A] \subset \mathbb{R}$

donc sur $\mathbb{R}$

Remarque Une suite "converge vers" une limite

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} f \qquad f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CV} f$$

Une série "converge et sa somme vaut" ...

$\sum f_n$ converge simplement

uniformement

normalement

~~$\sum f_n$ CN~~ donc - -

$\sum f_n$ CV normalement

2.2 Théorème de la double limite

Théorème de la double limite.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I et a une extrémité de I (éventuellement infinie).
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur I (on note S sa somme),
- pour tout n , f_n admet une limite finie ℓ_n en a ,

alors :

- la série $\sum \ell_n$ converge (on note ℓ sa somme),
- la fonction S admet une limite en a ,
- cette limite est égale à ℓ .

Preuve. La démonstration est hors programme. □

Remarque. On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et d'existence des limites envisagées.

Exemple. Pour $x > 0$, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Déterminer la limite pour $x \rightarrow +\infty$ de $f(x)$.

CV simple

• Pour $n > 0$ fixé

$$\left| \frac{(-1)^n}{x+n} \right| = \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\left(\frac{1}{x+n} \right)_n \text{ est } \geq 0$$

pas suffisant pour CV normale.

de ce qui

de limite nulle

donc par le théorème des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge

CV nil

• et de plus
 $\forall x$ T.S.A.

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} \right|$$

$$\leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{x+n+1} \right|$$

$$= \frac{1}{x+n+1} \quad \text{depend de } x$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \quad \text{indépendant de } x$$

$$\downarrow_{n \rightarrow +\infty}$$

$$0$$

donc $(f_n)_n$ converge unif. vers $(x \mapsto 0)$

Donc $\sum f_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$

• $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$

$$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 = l_n$$

$\triangle$ il faut parfois disserter les valeurs de n
en part. $n=0, n=1 \dots$

• par double limite, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$

Exemple. On s'intéresse à la série $\sum x^n$, qui converge simplement sur $] -1, 1[$. Utiliser le théorème de la double limite pour montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $] -1, 1[$.

On note $f_n:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^n$$

• $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1 = l_n$

Or $\sum \ln$ est divergente (général)
 donc $\sum f_n$ ne cv pas uniformément.

Remarque: $(f_n)_n$ ne cv pas unif. ven $(x \rightarrow 0)$

$$\left(f_n \left(1 - \frac{1}{n} \right) = e^{n \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)} \right. \\ \left. \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-1} \right)$$

donc $\sum f_n$ ne cv pas uniformément.

2.3 Somme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I .

Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- pour tout n , f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- la série des dérivées $\sum f'_n$ converge uniformément sur I ,

alors :

- S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- pour tout x : $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.

Remarque.

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{df_n}{dx}(x)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et d'existence des dérivées envisagées.

- La convergence uniforme de $\sum f_n$ n'entraîne pas la dérivabilité de la somme.
- Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I de $\sum f'_n$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I , ou d'autres intervalles adaptés à la situation.

Remarque. Étudier les variations de la somme f d'une série de fonction, c'est d'abord comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour $x < y$, ce qui peut souvent se faire en comparant les « sommandes », sans faire appel au théorème de classe $\mathcal{C}^1$, lourd à mettre en œuvre.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)$$

$$x \leq y$$

$$\forall n \quad x^n \leq y^n$$

$$f(x) \leq f(y)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} y^n$$

Exemple. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f_n: x \mapsto \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$$

On applique le th de classe $\mathcal{C}^1$ des séries de fonctions:

- Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\left| \frac{e^{-nx^2}}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{t.g d'une série convergente}$$

donc $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$

(Remq: la c'est normale)

- Les f_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f'_n(x) = \frac{1}{n^2} \cdot (-n2x) e^{-nx^2}$$

$$= -\frac{2x}{n} e^{-nx^2}$$

- idée 1:

Pour tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$

$$\forall x \in [a, b]$$

$$|f'_n(x)| = \frac{2x}{n} e^{-nx^2}$$

$$\leq \frac{2b}{n} e^{-na^2} \quad \text{indép de } x$$

↑ t.g série car

$$\leq 2b (e^{-a^2})^n$$

Donc $\sum f_n'$ est normalisé, donc uniformément
sur tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$ ~~donc sur $]0, +\infty[$~~

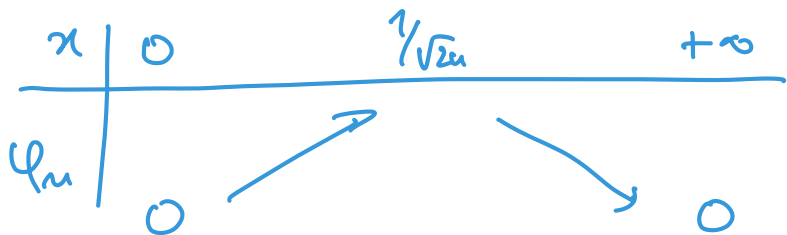
Donc $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$
donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$

• idée 2: $f_n'(x) = -\frac{2x}{n} e^{-nx^2}$

$\|f_n'\|_\infty$?

On note $\varphi_n(x) = x e^{-nx^2}$

$$\begin{aligned}\varphi_n'(x) &= e^{-nx^2} + x(-2nx)e^{-nx^2} \\ &= -2nx e^{-nx^2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\end{aligned}$$



donc $\|f_n'\|_\infty^{\mathbb{R}} = \|f_n'\|_\infty^{[2, +\infty[}$ par symétrie

$$= \frac{2}{n\sqrt{2n}} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\lambda}{n^{3/2}}$$

$$\lambda = \sqrt{2} \cdot e^{-1/2}$$

Or $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge donc $\sum f'_n$ converge
uniformement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Donc $f = \sum f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2n}{n} e^{-nx^2}$$

Exemple. Étudier la dérivabilité de la somme de la série $\sum \frac{1}{x^2 - n^2}$.

2.4 Extension aux fonctions de classes $\mathcal{C}^k$

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur I , et $k \in \mathbb{N}^*$.

Si :

- pour tout n , f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ,
 - pour tout $0 \leq j \leq k-1$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ,
 - la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I ,
- alors :

- la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I
- pour tout $1 \leq j \leq k$, $S^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.

Remarque.

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$$

Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.

- Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I des $\sum f_n^{(k)}$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I , ou d'autres intervalles adaptés à la situation.
- Pour montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on montre la convergence simple de $\sum f_n$ et la convergence uniforme de toutes les $\sum f_n^{(j)}$, pour $j \geq 1$.

Exemple. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

On note $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^4}$

Appliquons le th de classe $\mathcal{C}^2$ des séries de fonctions

- f_n sont $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n^3}$$

$$f_n''(x) = -\frac{\sin(nx)}{n^2}$$

- $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^4}$ et $\sum \frac{1}{n^4}$ converge

donc $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$

- $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^3}$ et $\sum \frac{1}{n^3}$ converge

donc $\sum f_n'$ converge simplement sur $\mathbb{R}$

- $|f_n''(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ indépendant de x

et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

donc $\sum f_n''$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$

Donc $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$$

$$f''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

560.1

a b z
α β γ ζ ξ χ

$$\zeta: \quad ? \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{"zeta"} \\ x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

- la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^x}$ converge si $x > 1$
(x fixé)

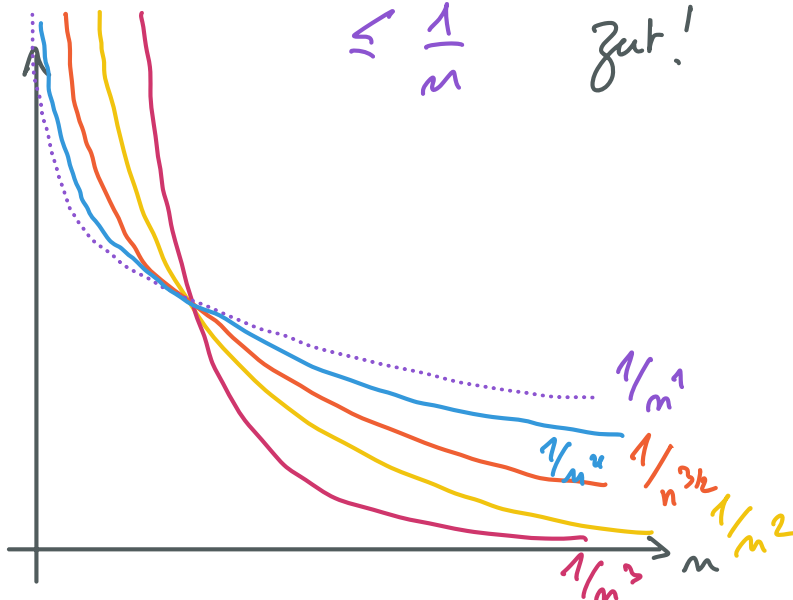
$$\text{Donc } D_\zeta =]1, +\infty[$$

$$\text{On pose } f_n: x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$$

- Étude de la continuité

* les f_n sont continus sur $]1, +\infty[$

$$* |f_n(n)| = \frac{1}{n^n} \leq \dots \text{ Indép de } n \\ \leq \frac{1}{n} \quad \text{Zut!}$$



Pour tout $[a, +\infty[\subset]1, +\infty[$



$\forall x \in [a, +\infty[$

$$|f_n(x)| = e^{-x \ln n}$$

$$\leq e^{-a \ln n}$$

$$= \frac{1}{n^a} \quad \text{indép de } n$$

$\uparrow$ pg série car car $a > 1$

Donc $\sum f_n$ cc uniform, donc unif sur $[a, +\infty[$

Donc $\sum$ est continu sur tout $[a, +\infty[\subset]1, +\infty[$

donc continu sur $]1, +\infty[$.

Montrons $\sum$ est $\mathcal{C}^1$.

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$$

• $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$

• les f_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$

$$\text{et } f'_n(x) = -\ln n \cdot e^{-x \ln n}$$

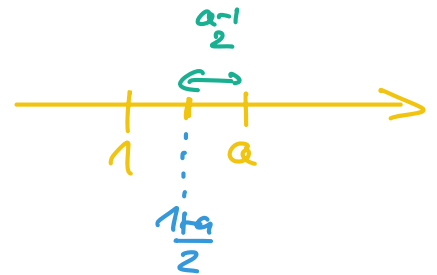
$$= \frac{-\ln n}{n^x}$$

• Sur tout $[a, +\infty[$ $1, +\infty[$

$$\forall x \in [a, +\infty[$$

$$|f'_n(n)| \leq \frac{\ln n}{n^a} \quad \text{indépend de } n$$

à étudier.



$$\left(\text{or } \frac{\ln n}{n^a} = \frac{1}{n^{\frac{1+a}{2}}} \cdot \frac{\ln n}{n^{\frac{a-1}{2}}} \right.$$

$$= \frac{1}{n^{\frac{1+a}{2}}} o(1)$$

$$= o\left(\frac{1}{n^{\frac{1+a}{2}}}\right) \text{ où } \frac{1+a}{2} > 1$$

$$\text{donc } \sum \frac{\ln n}{n^a} \text{ converge}$$

Donc $\sum f'_n$ converge uniformément

sur tout $[a, +\infty[$ $1, +\infty[$

Donc ζ est $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a, +\infty[$ $1, +\infty[$,

donc $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et

$$\zeta'(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^x}$$

Et la classe $\mathcal{C}^\infty$?

ie type $\sum$ et $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

On veut donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{les } f_n \text{ sont } \mathcal{C}^\infty \\ \sum f_n \text{ cv simplement} \\ \sum f_n^{(k)} \text{ cv uniform } \forall k \end{array} \right.$$

• les f_n sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$

et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln x)^k}{n^x}$ par récurrence

• Sur $[a, +\infty[$ $a > 1$, $]1, +\infty[$,

$$|f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{(\ln x)^k}{n^a} \quad \text{indép de } x$$

↑
soit $\frac{1}{n^{\frac{1+a}{2}}} \cdot \frac{(\ln x)^k}{n^{\frac{a-1}{2}}}$

$$= o\left(\frac{1}{n^{\frac{1+a}{2}}}\right)$$

Donc $\sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^* \\ \text{}}} f_n^{(k)}$ cv normalement sur $[a, +\infty[$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$

Ainsi $\sum$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur tout $[a, +\infty[$ $a > 1$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ sur $]1, +\infty[$.

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

e^x .

variante ?

limite en $+\infty$? facile

limite en 1 ? ? ?

convergence ?