Pour moi : 540.15, 540.16

ex CCINP : remarquer les questions de cours.

Séries de fonctions numériques

1 Modes de convergence d'une série de fonctions

Dans ce chapitre, on considère des applications $f_n : I \to \mathbb{R}$ et on étudie la série de fonctions $\sum f_n$.

$\mathbb{C}$

1.1 Convergence simple

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions $I \to \mathbb{K}$. On dit que $\sum f_n$ **converge simplement** si et seulement si, pour tout $x \in I$ fixé, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.
Dans ce cas, on définit :

$$\begin{array}{rcl} S : I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{array}$$

appelée **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$.

Remarque.

- *La convergence simple est la convergence point à point. On rédige toujours l'étude de la convergence simple en travaillant « à x fixé ».*
- *Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut noter :*

$$S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

Alors $(S_n)_n$ la suite de fonctions des sommes partielles de $\sum f_n$, et la convergence simple de $\sum f_n$ est équivalente à la convergence simple de $(S_n)_n$.

- *En cas de convergence simple sur I, on note :*

$$R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = S(x) - S_n(x)$$

$R_n(x) \neq R_n$

Alors la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge simplement vers la fonction constante nulle sur I.

- *On peut rencontrer des séries de fonctions qui sont indexées par $n \geqslant n_0$.*

Il arrive que la convergence simple n'ait pas lieu sur I tout entier, mais sur une partie J de I. Dans ce cas, la somme de la série de fonction n'est définie que sur J, appelé **domaine de convergence simple** :

Proposition. La somme d'une série de fonction est définie là où la série de fonction converge simplement.

Remarque. *L'étude de la convergence, à x fixé, de $\sum f_n(x)$, se fait en utilisant les outils du chapitre 520: on travaille en général sur le terme général $f_n(x)$, que l'on essaye de comparer au terme général d'unes série numérique connue (Riemann, géométrique, etc.). Dans ce cas, x joue le rôle d'un paramètre sur lequel on peut être amené à discuter.*

On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

(1) Domaine de déf de S

↳ où est-ce qu'il y a cv simple

ie pour quels x la série $\sum f_n(x)$ cv ?

Exemple. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ dans le cas où :

1. $f_n(x) = x^n$
2. $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$
3. $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx^2}}{n}$

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

$\sum x^n$ série géométrique de raison x

elle converge ssi $|x| < 1$

Donc on peut définir sa somme :

$$S :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

② $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ $\quad n \geq 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé

Est-ce que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge ?

(Pour $x=1$, la série (harmonique) diverge)

Si $x > 1$ $\quad \sum \frac{1}{n^x}$ converge

Si $x \leq 1$ $\quad \sum \frac{1}{n^x}$ diverge $\quad$ Riemann.

③ Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé :

1er cas si $x = 0$, $\quad f_n(x) = \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

2e cas si $x \neq 0$

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{n}$$

$$= o\left(e^{-nx^2}\right)$$

$$= o\left(\left(e^{-x^2}\right)^n\right)$$

tg de série géométrique absolument convergente car $\left|e^{-x^2}\right| < 1$

donc $\sum f_n(x)$ converge

donc $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$

On pose : $S : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n}$

parité ? $\quad e^{\infty}$?

variations ?

limites en 0 ?, $+\infty$?

graphe

4. $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx^2}}{n}$

5. $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx^2}}{n^2}$

6. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$

(4) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

Ça a un peu la tête d'une série alternée.

1er cas : Si $x \neq 0$

$$|f_n(x)| = \frac{e^{-nx^2}}{n}$$

$$= o\left(\left(e^{-x^2}\right)^n\right) \quad \text{tg série cv}$$

donc $\sum f_n(x)$ cv absolument (donc converge)

2e cas Si $x = 0$

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n}$$

$\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ série de Riemann alternée convergente

$\left(\left(\frac{1}{n}\right)_n \right.$ est positive, décroissante, de limite nulle $\left.\right)$

(5)

(6) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$

1er cas $x > 1$

$$f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^n}{x^{2n}}$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)^n \quad \text{tg série géométrique convergente}$$

car $0 < \frac{1}{x} < 1$

2^e cas : $x = 1$

$$f_n(1) = \frac{1}{2} \qquad \sum f_n(1) \text{ div grossièrement}$$

3^e cas $-1 < x < 1$

$$f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^n}{1}$$

$$= x^n$$ tq série géom. convergente car $|x| < 1$

4^e cas : $x = -1$ $\quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{2}$ div. grossière de $\sum f_n(-1)$

5^e cas $x < -1$ $\quad f_n(x) \sim \left(\frac{1}{x}\right)^n$

tq série géom. convergente

donc $\sum f_n$ cv simplement sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

1.3 Convergence normale

On introduit dans ce paragraphe un autre mode de convergence des séries de fonctions, plus « fort » que les précédents.

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $I \to \mathbb{K}$. On dit que $\sum f_n$ **converge normalement sur** I si et seulement si :

$$\begin{cases} f_n \text{ est bornée sur } I \text{ pour tout } n \\ \sum \|f_n\|_\infty \text{ converge} \end{cases}$$

Remarque.

- *On peut donner une définition moins forte, en ne travaillant que pour* $n \geqslant n_0$.
- *Le premier point permet de garantir l'existence de* $\|f_n\|_\infty = \text{Sup}\{|f_n(x)|,\ x \in I\}$
- *Le second point est la convergence d'une série* ***numérique****.*
- *La convergence normale de* $\sum f_n$*, c'est la convergence de* $\sum \|f_n\|_\infty$.

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $I \to \mathbb{K}$.
S'il existe une série numérique $\sum \alpha_n$ convergente et majorante, c'est-à-dire telle que :

$$\forall n, \forall x,\ |f_n(x)| \leqslant \alpha_n$$

où α_n est positive, indépendante de x et t.g. d'une série convergente,
alors $\sum f_n$ converge normalement.

Pour montrer que $\|f_n\|_\infty$ est le tg série convergente,

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in I} |f_n(t)|$$

On veut majorer $0 \leq \|f_n\|_\infty \leq \ldots$

tg série convergente

ie

$$\forall t \in I \quad |f_n(t)| \leq \ldots\ldots$$

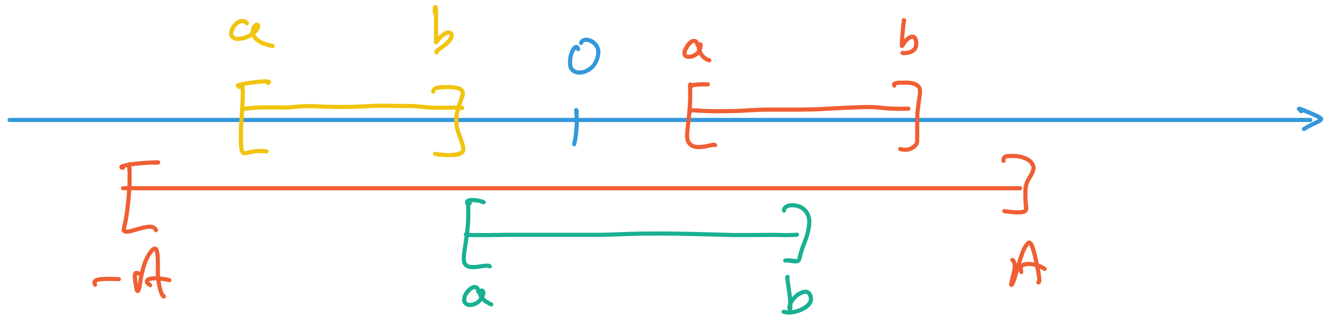
indépendant de t

tg série convergente.

Exemple. Étudier la convergence normale sur tout segment de $\sum \frac{x^n}{n!}$.

Rmq : Il y a convergence simple sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$



Surtout : $[-A, A] \subset \mathbb{R}$,

$$\forall x \in [-A, A] \quad \left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq \frac{A^n}{n!}$$ indép de x

t.g. d'une série convergente

(c'est $f_n(A)$)

(On a donc montré : $\| f_n \|_\infty^{[-A,A]} \leq \frac{A^n}{n!}$)

donc $\sum f_n$ converge normalement sur tout $[-A, A]$

Exemple. Étudier la convergence normale sur $[0,1]$ de $\sum f_n$ où $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n}$.

$\forall x \in [0,1] \quad |f_n(x)| = \frac{x^n}{n}$

$\leq \frac{1}{n}$ indép de x

↑ zut, t.g. série divergente.

En fait :

$|f_n(1)| \leq \|f_n\|_\infty^{[0,1]}$

$\| \frac{1}{n}$

↑ tg d'une série positive divergente

Donc $\sum \|f_n\|_\infty^{[0,1]}$ diverge

Donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement.

Notion plus subtile que la cv normale

1.2 Convergence uniforme

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $I \to \mathbb{K}$. On dit que $\sum f_n$ **converge uniformément sur** I si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_n$ de ses sommes partielles converge uniformément sur I.

↳ cf S20

i.e. $\begin{cases} (S_n)_n \text{ cv simplement sur } I, \text{ on note } S \text{ sa limite} \\ (S - S_n)_n \text{ cv unif. vers } 0 \end{cases}$

Remarque. *On peut quantifier la définition par :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ t.q. } \forall n \geqslant N, \ \forall x \in I, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant \varepsilon$$

Proposition. La convergence uniforme d'une série de fonctions implique sa convergence simple.

Théorème.

$\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si :

$$\begin{cases} \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \\ (R_n)_n \text{ converge uniformément sur } I \text{ vers } 0 \end{cases}$$

Exemple. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur l'intervalle précisé.

1. $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$, $I = [0, 1]$.

Zut, la série ne cv pas normalement !

- Étude de la cv simple :

Soit $x \in [0, 1]$ fixé.

1er cas : si $x = 1$, $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ positive, décr. de limite nulle

donc $\sum (-1)^n \cdot \frac{1^n}{n}$ cv.

2e cas : si $x \in [0, 1[$

$$|f_n(x)| = \frac{x^n}{n}$$

$$= o(x^n)$$ tg série géom absolument cv.

donc $\sum f_n(x)$ cv absolument.

Remarque

$$\sum (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

$\left(\frac{x^n}{n}\right)_n$ est positive, décroissante, de limite nulle

donc le th des séries alternées s'applique

$(x^n)_n \searrow \geq 0$, $\left(\frac{1}{n}\right) \searrow \geq 0$

* Étude de la convergence uniforme

$\forall x \in [0,1]$

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \right|$$

$$\cancel{\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}}$$

$$\cancel{\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k}}$$

$$\leq \left| (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|$$

par le th des séries alternées

$$\leq \frac{1}{n+1} \quad \text{indépendant de } x$$

$$\downarrow n \to +\infty$$

$$0$$

donc la cv est uniforme sur $[0,1]$.

2. $f_n(x) = x e^{-nx^2}$, $I = \mathbb{R}$.

- Cv simple

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé

1er cas : si $x = 0$ $\quad f_n(0) = 0$ et $\sum f_n(0)$ cv

2e cas : si $x \neq 0$ $\quad f_n(x) = x(e^{-x^2})^n$

avec $|e^{-x^2}| < 1$

donc la série géom.

$\sum f_n(x)$ converge absolument.

- CV normale ?

$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f_n(x)| = \underbrace{|x| e^{-nx^2}}_{\text{cloche}}$

$\leq \sim\sim$ indép de x

$\uparrow$ tg série cv ?

$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-1} \leq \|f_n\|_\infty$

$\uparrow$ tg série positive divergente

Donc pas de cv normale

- cv uniforme :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} x e^{-x^2 k} \right|$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ |x| e^{-x^2(n+1)} \dfrac{1}{1 - e^{-x^2}} & \end{cases}$$

$e^{-x^2(n+1)} \dfrac{|x|}{\underbrace{1 - e^{-x^2}}_{\sim + x^2}} \sim \frac{1}{x}$

$$R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot e^{-1} \cdot \frac{1}{1-e^{-\frac{1}{n+1}}}$$

$$\sim \sqrt{n+1} \cdot e^{-1}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

donc $R_n \underset{+\infty}{\overset{CU}{\not\longrightarrow}} (x \mapsto 0)$

donc $\sum f_n$ ne cv pas uniformément.

Remarque. *Il est difficile de démontrer la convergence uniforme sans calculer explicitement la somme $S(x)$, sauf à avoir recours dans certains cas au TSSA.*

3. $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n + x^2}$, $I = \mathbb{R}$.

Proposition. Si $\sum f_n$ et $\sum g_n$ convergent uniformément sur I, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\sum(\lambda f_n + \mu g_n)$ converge uniformément sur I.

Proposition. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers $\widetilde{0}$ sur I.

Intéressant pour la contraposée.

Preuve : On suppose $\sum f_n$ cv unif.

On note S la somme et $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles.

$$f_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{CS} S - S = (x \mapsto 0)$$

$$|f_n(x) - 0| = |S_n(x) - S(x) + S(x) - S_{n-1}(x)|$$

$$\leq |S_n(x) - S(x)| + |S(x) - S_{n-1}(x)|$$

$$\leq \|S - S_n\|_\infty + \|S - S_{n-1}\|_\infty$$

indep de x

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

1.4 Lien entre les différents modes de convergence

Proposition. La convergence uniforme implique la convergence simple.

Proposition. La convergence normale implique la convergence uniforme.

$\sum f_n$: cv normale $\Rightarrow$ cv uniforme $\Rightarrow$ cv simple

$(f_n)_n$ cv uniforme $\Rightarrow$ cv simple

Preuve: Soit $\sum f_n$ série de fct définie sur I.

On suppose que $\sum f_n$ cv normalement

(ie les f_n sont bornées et $\sum \|f_n\|_\infty^I$ cv)

* Mq que $\sum f_n$ cv simplement absolument

Soit $x \in I$ fixé. Mq que $\sum f_n(x)$ cv

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty^I$$

t.g série convergente

Donc $\sum f_n(x)$ cv absolument (donc converge)

* Mq que $(R_n)_n$ cv uniformément vers 0

on parle d'une suite de fonctions

$\forall x \in I$

$$|R_n(x) - 0| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)|$$

car $\sum f_n(x)$ cv absolument

$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty^I \quad \text{indép de } x$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{comme reste de la série convergente } \sum \|f_k\|_\infty^I$$

Remarque : Pour montrer une cv uniforme, on commence toujours par essayer de montrer une cv normale.