

Pour lundi 7h, un exercice à rédiger parmi :

530.16, 530.17 ou 530.24(*)

²⁰²⁶**MPI*MPI**

110

Compléments sur les groupes

2 Sous-groupe engendré par une partie

Proposition. Une intersection de sous-groupes est un sous-groupe : si $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de $(G, *)$, alors $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de G .

Définition. Soit $(G, *)$ un groupe et A une partie de G . On appelle **sous-groupe engendré par A** le plus petit sous-groupe H de $(G, *)$ qui contient A .

Remarque. On note $\langle A \rangle$ le sous-groupe engendré par A , mais cette notation n'est pas dans le programme officiel.

Remarque. La définition signifie que H est le sous-groupe de $(G, *)$ engendré par A si et seulement si :

- H est un sous-groupe de $(G, *)$
- $A \subset H$
- Pour tout sous-groupe K de $(G, *)$, $A \subset K \implies H \subset K$

Proposition. Avec les notations précédentes :

$$\langle A \rangle = \bigcap_{\substack{A \subset H \\ H \text{ sous-groupe de } G}} H$$

Description du sous-groupe engendré par A . Soit G un groupe noté multiplicativement. $\langle A \rangle$ est l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent sous la forme :

$$a_1^{\varepsilon_1} \dots a_n^{\varepsilon_n}$$

où $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in A$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$.

Remarque. Lorsque G est commutatif et noté additivement, le sous-groupe engendré par A est l'ensemble des éléments qui s'écrivent sous la forme :

$$k_1 a_1 + \dots + k_p a_p$$

où $p \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_p \in A$ sont distincts, et $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{Z}$. Ce ne sont pas tout à fait des combinaisons linéaires, puisque les « scalaires » sont ici entiers.

Définition. La partie A de $(G, *)$ est dite **génératrice de G** lorsque le sous-groupe de $(G, *)$ engendré par A est G .

Proposition. Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $a\mathbb{Z} = \langle a \rangle$, où $a \in \mathbb{N}$.