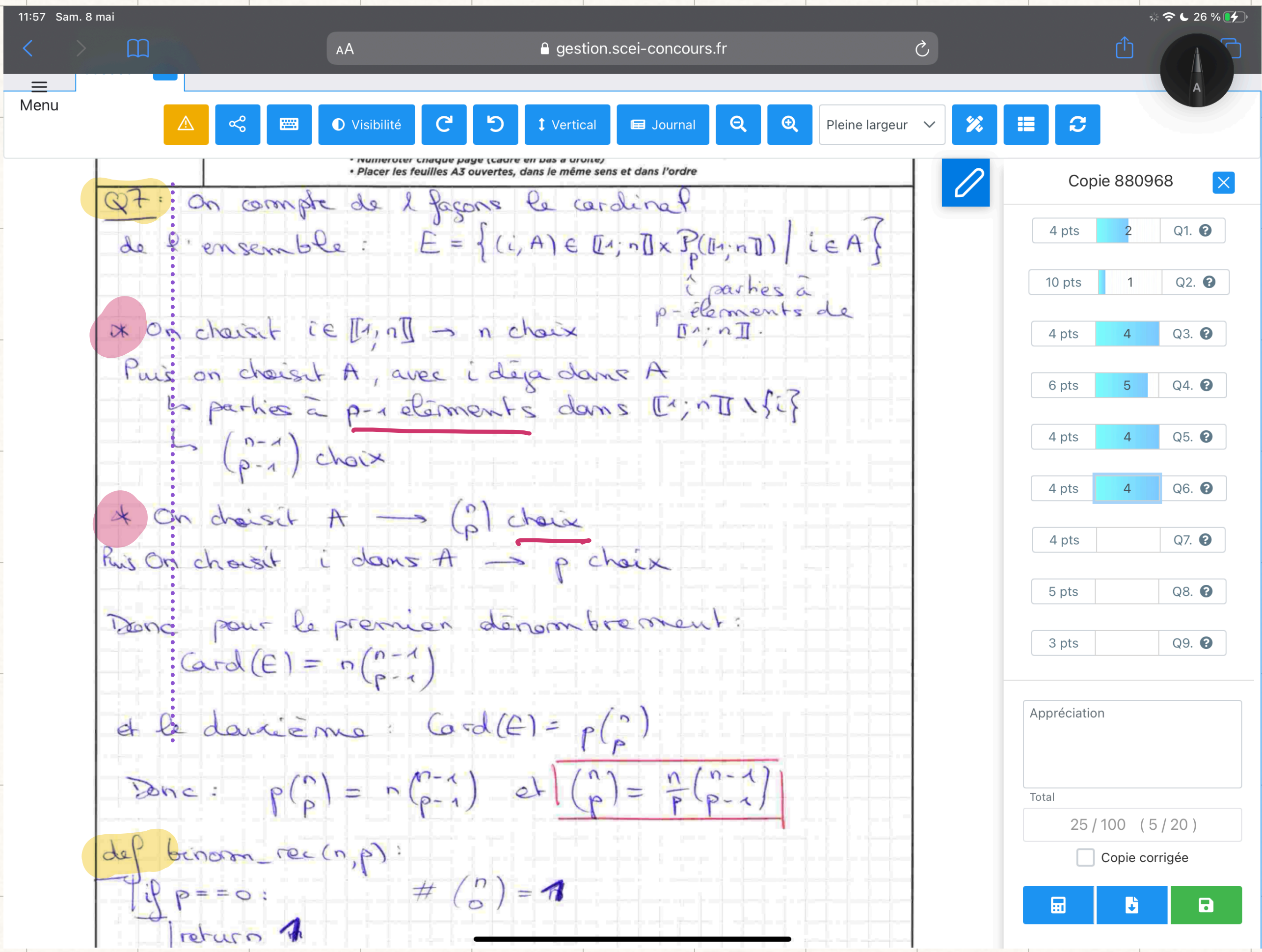
Ce devoir est constitué de trois problèmes indépendants.

Respecter l'ordre des questions, et des problèmes !!



Ordre des questions, numéroter les pages. (nb de page

FIN

Marge

Mettre en valeur les questions.

Mettre les résultats, p^t important en valeur

Problème 1

On étudie la nature (convergence ou divergence) de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n} z^n$ suivant les valeurs du nombre complexe z.

$\boxed{1}$ On suppose $z \in \mathbb{C}$ et $|z| \neq 1$. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n} z^n$. Travailler sur le trig.

$\boxed{2}$ On suppose $z = 1$. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n} z^n$.

$\boxed{3}$ On suppose $z = -1$. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n} z^n$.

$\boxed{4}$ On suppose dans toute cette question $|z| = 1$, $z \neq 1$.
On fixe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$, et on définit, pour tout $n \geqslant 1$:

$$v_n = \frac{\ln n}{n} \quad \text{et} \quad \sigma_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$$

(a) Montrer que la suite $\big(\sigma_n(\theta)\big)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

(b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k} z^k = \sum_{k=2}^{n-1} (v_k - v_{k+1})\sigma_k(\theta) - v_2\sigma_1(\theta) + v_n\sigma_n(\theta)$$

Abel.

(c) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n} z^n$ converge.

Sur $\mathbb{C}$ pas de $\leq$

↳ Travailler en module.

$\boxed{4a}$

$$|\sigma_n(\theta)| = \left| \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} \right|$$

$$= \left| 1 \, \frac{1 - e^{i\theta(n+1)}}{1 - e^{i\theta}} \right| \quad \text{car } e^{i\theta} \neq 1$$

$$\leq \frac{|1| + |e^{i\theta(n+1)}|}{|1 - e^{i\theta}|}$$

$$= \frac{2}{|1-e^{i\theta}|} \quad \text{indép de } n$$

$\boxed{b}$ • Par réc $\longleftarrow$ Déf...

• On part du membre de droite ...

• $$\int_1^2 \frac{1}{t} \sin t \, dt = \left[\frac{1}{t} \cdot (-)\cos t\right]_1^2 - \int_1^2 -\frac{1}{t^2}(-)\cos t \, dt$$

$[\ldots] \int_1^2 \frac{1}{t} \sin t \, dt$

Rque V1 $$\int_1^2 \frac{1}{t} \sin t \, dt = \cos 1 - \frac{\cos 2}{2} - \int_1^2 \frac{\cos t}{t^2} dt$$

V2 Exprimer $\int_1^2 \frac{1}{t} \sin t \, dt$ à l'aide de $\int_1^2 \frac{\cos t}{t^2} dt$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k} z^k = \sum_{k=2}^{n} v_k \cdot (\sigma_k - \sigma_{k-1})$$

$$= \sum_{k=2}^{n} v_k \sigma_k - \sum_{k=1}^{n-1} v_{k+1} \sigma_k$$

$$= \sum_{\sim}^{\sim} (v_k - v_{k+1}) \sigma_k$$

(c) $$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k} z^k = \sum_{k=2}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) \sigma_k(\theta) \quad - v_2 \sigma_1(\theta) + v_n \sigma_n(\theta)$$

$$\cancel{\left|\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k} z^{k}\right|}$$

$$\left|v_k - v_{k+1}\right| \left|\sigma_k(\theta)\right|$$

$$= O(v_k - v_{k+1})$$

où $v_k - v_k \sim \dfrac{\ln k}{k^2}$

$$= O\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$$

Problème 2

Pour éviter toute confusion, on attire l'attention des candidats sur la typographie, dans le sujet, des relations de comparaison usuelles : O (« grand O », relation de domination) et o (« petit o », relation de négligeabilité).
On rappelle l'inégalité de Taylor-Lagrange : si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, à valeurs réelles ou complexes, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{(b-a)^n}{n!} \operatorname*{Sup}_{[a,b]} \left(|f^{(n)}| \right)$$

Partie 1. Convergence des séries de Riemann

$\boxed{1}$ Soit f une fonction réelle, définie continue et décroissante sur $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, que pour tout entier $k \in [a+1, +\infty[$, on a

$$\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$\boxed{2}$ En déduire la nature de la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

En cas de convergence, on pose $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

$\boxed{3}$ Pour tout réel $\alpha > 1$, montrer que $1 \leqslant S(\alpha) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$.

Partie 2. Étude asymptotique du reste

Dans la suite du problème, pour tout réel $\alpha > 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

$\boxed{4}$ En utilisant l'encadrement montré au début du problème, montrer que :

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

$\boxed{5}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$.
En appliquant par exemple à f une inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$$

où A_k est un réel vérifiant $|A_k| \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{6\,k^{\alpha+2}}$.

$\boxed{6}$ En déduire que :

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

$\forall x \in [k-1, k]$, $\quad f(k) \leq f(x)$

donc
$$\underbrace{\int_{k-1}^{k} f(k)\,dx}_{= f(k)} \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$$

$\boxed{2}$ Th de ~~comp série/intégrale~~

Technique de comp série/intégrale

Si $\alpha = 1$ $\qquad \sum \frac{1}{n}$ $\qquad$ (div ?)

On travaille sur les sommes partielles

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq$$

donc
$$\underbrace{\ln(n+1)}_{\to +\infty} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Si $\alpha > 1$ $\qquad \sum \frac{1}{n^\alpha}$ $\qquad$ (cv ?)

On travaille sur les sommes partielles

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$A \qquad\qquad\qquad B$$

~~donc par encadrement,~~ $\cancel{\sum \frac{1}{n^\alpha}}$ ~~cv~~

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}$$

$$\leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{indép de } n$$

donc $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \right)_n$ est majorée, croissante (car les $\frac{1}{k^\alpha}$ sont >0) donc converge.

Par passage à la limite

(ne fournit pas de cv)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

On rappelle l'inégalité de Taylor-Lagrange : si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, à valeurs réelles ou complexes, alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} \cancel{\operatorname{Sup}_{[a,b]}(|f^{(n)}|)} \; M_n$$

majorant de $|f^{(n)}|$

On applique l'inég de Taylor-Lagrange :

à $f : x \longmapsto \ldots$ qui est $\mathcal{C}^3$

à l'ordre 3

entre k et $k+1$

$f'(x) =$ $f''(x) =$ $f'''(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^{\alpha+2}}$

$\forall x \; |f'''(x)| \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{k^{\alpha+2}}$ indép de x

Donc :

$$\left| f(k+1) - \left(f(k) + \frac{1}{1!} f'(k) + \frac{1}{2!} f''(k) \right) \right| \leq \frac{1}{3!} \frac{\alpha(\alpha+1)}{k^{\alpha+2}}$$

Ainsi, $f(k+1) = f(k) + f'(k) + \frac{1}{2} f''(k) + A_k$

erreur commise

où $|A_k| \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{6\, k^{\alpha+2}}$

Problème 3

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes. On dit qu'elle est C-convergente si la suite $(m_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$\forall n \geqslant 0 \qquad m_n = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1}$$

est convergente et on appelle alors C-limite de $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la limite de la suite $(m_n)_{n\geqslant 0}$.

$\boxed{1}$ Montrer que toute suite convergente est C-convergente.
Donner un exemple de suite C-convergente mais non convergente.

Césàro

$\boxed{2}$ Exprimer a_n à l'aide de m_n et m_{n-1}.
En déduire que si la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est C-convergente alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

$\boxed{3}$ On définit, si $\alpha \in]0,1[$, $a_n = (-1)^n n^\alpha$. On pose $b_n = a_n + a_{n+1}$. Montrer que la suite (b_n) converge vers 0 ; exprimer $\displaystyle\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} b_k$ à l'aide de m_n, a_0 et a_{n+1} puis montrer que (a_n) est C-convergente.

$\boxed{4}$ (a) Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout nombre complexe z, on définit

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$$

et on pose : $\sigma_n(z) = \dfrac{S_0(z) + S_1(z) + \cdots + S_n(z)}{n+1}$.
Déterminer l'ensemble F des nombres complexes de module 1 pour lesquels la suite $(S_n(z))_{n\geqslant 0}$ est C-convergente et déterminer la limite de la suite $(\sigma_n(z))_{n\geqslant 0}$.

(b) Soit $\alpha \in]0,1[$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout nombre complexe z, on définit

$$T_n(z) = \sum_{k=0}^{n} (1 + \alpha e^{ik\lambda}) z^k$$

et on pose : $\tau_n(z) = \dfrac{T_0(z) + T_1(z) + \cdots + T_n(z)}{n+1}$.
Déterminer l'ensemble G des nombres complexes de module 1 pour lesquels la suite $(T_n(z))_{n\geqslant 0}$ est C-convergente et déterminer la limite de la suite $(\tau_n(z))_{n\geqslant 0}$.

Les questions suivantes sont indépendantes des précédentes.

Dans la suite, si $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $e_\lambda \;:\; t \to e^{\mathrm{i}\lambda t}$.

$\boxed{5}$ On pose, pour tout entier naturel $N \geqslant 0$,

$$K_N = \sum_{j=-N}^{N} \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e_j$$

(a) Montrer que, si $N \geqslant 1$,

$$K_N(t) = 1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{2j}{N+1} \cos\left((N+1-j)t\right)$$

(b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} e^{\mathrm{i}\left(\frac{N}{2}-k\right)t} = \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

Somme géométrique de raison e^{-it}

$$= e^{i\frac{N}{2}t} \cdot \frac{1-e^{-it(N+1)}}{1-e^{-it}}$$

puis que : $K_N(t) = \dfrac{1}{N+1}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2$.

On considère dorénavant un entier $n \geqslant 1$, des nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ (c'est-à-dire que la famille $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1})$ est libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$), des nombres réels positifs $r_0, \ldots, r_{n+1}$ et des nombres réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$.

Pour $j = 1, \ldots, n+1$ on pose $a_j = r_j e^{\mathrm{i}\alpha_j}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = r_0 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} a_j e^{\mathrm{i}\lambda_j x}$.

$\boxed{6}$ (a) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} e_\lambda(t)\mathrm{d}t$$

admet une limite quand $x \to +\infty$.

(b) Pour tout entier $N \geqslant 0$, on pose $g_N(x) = \displaystyle\prod_{p=1}^{n+1} K_N(\lambda_p x + \alpha_p)$. Écrire g_N comme combinaison linéaire de fonctions e_λ avec λ de la forme

$$\lambda = j_1\lambda_1 + \cdots + j_{n+1}\lambda_{n+1}\ , \quad j_1, \ldots, j_{n+1} \in \{-N, \ldots, N\}$$

En déduire que la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} g_N(t)\mathrm{d}t$$

admet une limite quand $x \to +\infty$, calculer cette limite.

(c) Montrer que la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)g_N(t)\mathrm{d}t$$

admet une limite quand $x \to +\infty$, et que cette limite vaut $r_0 + \dfrac{N}{N+1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} r_j$.