

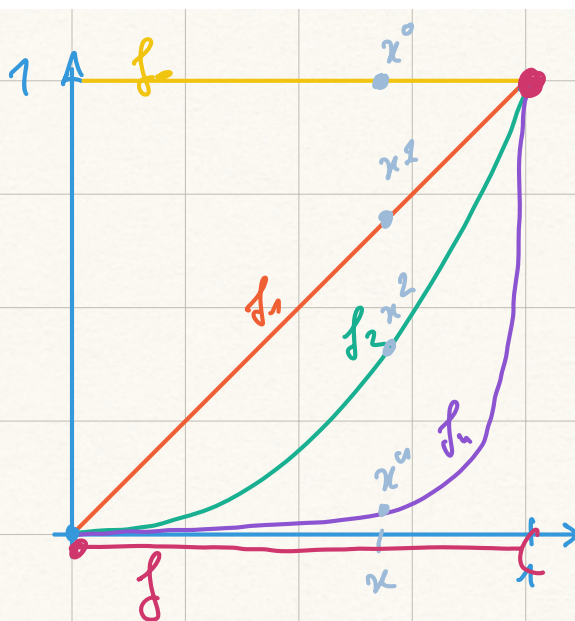
Suites de fonctions numériques

1 Quelques exemples

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

1. Représenter quelques fonctions f_n .
2. Est-ce que $(f_n(x))_n$ admet une limite ?
3. Continuité ?



$$f_n : \left([0,1] \rightarrow \mathbb{R} \right) \\ x \mapsto x^n$$

$$f_n(n) \quad x^n \in \mathbb{R}$$

② On fixe $x \in [0,1]$. Est-ce que la suite numérique $(x^n)_n$ a une limite ?
 $x^n \longrightarrow ?$

1^{er} cas si $x \in [0, 1[$

$$x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(très géométrique)

2^e cas: si $x = 1$

$$x^n = 1$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

On peut poser $f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

J'ai envie de dire " ~~f_n tend vers f~~ "

on peut dire : $\forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$

les f_n sont continues sur $[0, 1]$

et pourtant f ne l'est pas.

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto n^2 x (1 - x^2)^n \end{aligned}$$

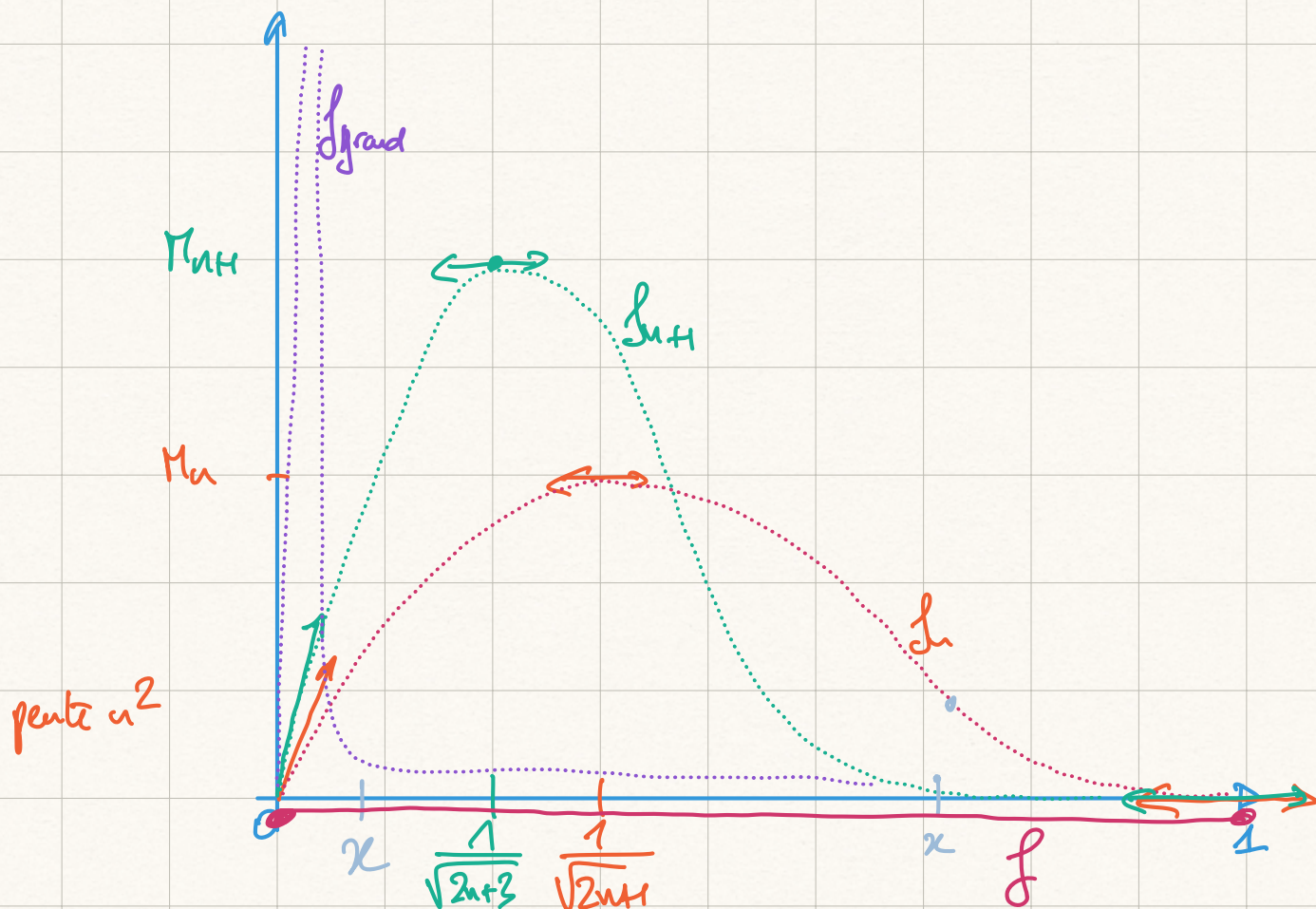
1. Représenter quelques fonctions f_n .
2. Est-ce que $(f_n(x))_n$ admet une limite ?
3. Intégrale sur $[0, 1]$?

par $n \geq 2$

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= n^2 (1-x^2)^n + n^2 x \cdot n \cdot (-2x) \cdot (1-x^2)^{n-1} \\ &= n^2 (1-x^2)^{n-1} [1-x^2 - 2nx^2] \\ &= n^2 (1-x^2)^{n-1} (-)(2n+1) \left(x - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) \end{aligned}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$		1
f'_n	n^2	+	0	-	0
f_n	0	M_n		0	

$$\begin{aligned} \text{avec } f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) &= n^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \\ &= \frac{n^2}{\sqrt{2n+1}} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)\right) \\ &= \frac{n^2}{\sqrt{2n+1}} \exp\left(n \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{n^2}{\sqrt{2n+1}} \left(e^{-\frac{1}{2} + o(1)}\right) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2e}} \end{aligned}$$



② Soit $x \in [0, 1]$ fixé
 $(f_n(x))_n$ converge ?

$$f_n(x) = n^2 x (1-x^2)^n$$

1^{er} cas : $n \cdot x = 0$

$$f_n(x) = 0$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

2^e cas : $x \in]0, 1]$

$$f_n(x) = x \cdot n^2 \cdot \underbrace{(1-x^2)^n}_{\text{géométrique de raison } < 1}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

géométrique de raison < 1

par croissances comparées

Definition: $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ 0 & \text{if } x \in]0, 1[\end{cases}$$

~~" f_n tend vers f "~~

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ s.t. } \forall n \geq n_0 \quad \underbrace{|f_n - f|}_{\text{distance?}} \leq \varepsilon$$

$$\int_0^1 f_n(x) dx$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = 0$$

$$\int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx$$

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{x^2}{n+1} (1-x^2)^{n+1} \right]_0^1$$

$$\frac{x^2}{2(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

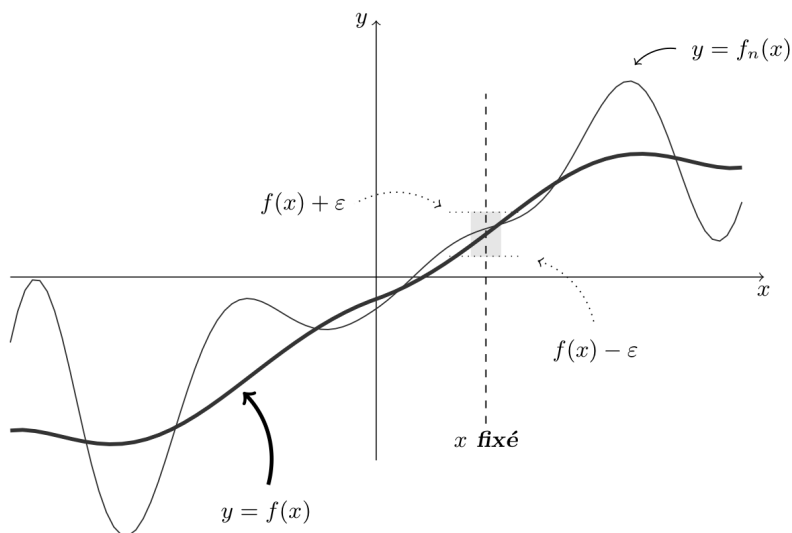
1. Est-ce que $(f_n(x))_n$ admet une limite ?
2. Dérivées ?

2 Convergence simple

2.1 Définition

Définition. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I , à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur I** vers f si et seulement si, pour tout $x \in I$ **fixé**, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$. La fonction f s'appelle alors la **limite simple** de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

Interprétation graphique.



Remarque.

- $(f_n)_n$ **converge simplement sur I** si et seulement s'il existe f telle que $(f_n)_n$ converge simplement vers f .
- Étudier la convergence simple de $(f_n)_n$, c'est étudier la convergence de la suite $(f_n(x))_n$ à x fixé.
- On trouve parfois la notation $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CS}} f$.
- On peut quantifier la proposition « $(f_n)_n$ converge simplement vers f » :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Dans cette quantification, l'indice N à partir duquel $f_n(x)$ approche $f(x)$ à ε près dépend de x .

Exemple. Étudier la convergence simple des suites de fonctions définies par :

1. $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ où $f_n(x) = x^n$

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} \left(\begin{array}{l} x \mapsto 0 \text{ si } x \in [0, 1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{array} \right)$$

$[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

2. $g_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ où $g_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$

$n \geq 1$

Étude de la convergence simple

Soit $n \in [1, +\infty[$ fixé

$$g_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$$
$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $g_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} (x \mapsto 0)$

$$g_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} 0 \quad \leftarrow \text{ambigu}$$
$$g_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} \varnothing$$
$$\oplus$$

~~$$\frac{1}{n+x^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} 0$$~~

FAUX

~~$$g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} (x \mapsto 0)$$~~ FAUX

~~Donc~~

$$3. h_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ où } h_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Étude de la convergence simple.

Soit $x \geq 0$ fixé.

1^{er} cas : $x = 0$

$$h_n(x) = 0$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

2^e cas $x > 0$

$$h_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } n \leq \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} & \text{si } n > \frac{1}{x} \end{cases}$$

On a inversé le conditionnement.

$$= \frac{1}{x} \quad \text{pour } n \geq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$$

CQ : $h_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CS} h : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2.2 Propriétés

Proposition. Si $B \subset I$ et si la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I ,
alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f|_B$ sur B .

Proposition. Si les suites de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simplement vers f et g sur I et si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
alors la suite de fonctions $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $\lambda f + \mu g$ sur I .