

Pour ve : 220.2, 220.3, 220.4.

6 Trace d'une matrice

Définition. La trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Proposition.

- tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Pour A, B telles que AB et BA sont carrées :

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

Corollaire. Deux matrices semblables ont la même trace.

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **trace de u** la trace de toute matrice représentant u .

Proposition. tr est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$ vérifiant, pour tout $u, v \in \mathcal{L}(E)$:

$$\text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u)$$

• $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$

tr linéaire i.e.

$$\begin{aligned}\text{tr}(\lambda A + \mu B) &= \sum_{i=1}^n [\lambda A + \mu B]_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda [A]_{ii} + \mu [B]_{ii} \\ &= \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B)\end{aligned}$$

par lin. des CL de matrices

elle est non nulle $\text{tr}(I_n) = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$

$$= n$$

$$\dim \text{Ker tr} = n^2 - 1$$

• Prop: $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n [AB]_{ii} && \text{par def de tr.} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n [A]_{ik} [B]_{ki} \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n [B]_{ki} [A]_{ik} \\
 &= \sum_{k=1}^n [BA]_{kk} \\
 &= \text{tr}(BA)
 \end{aligned}$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

$$\text{tr}(ABC) \stackrel{?}{=} \text{tr}(BAC)$$

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(\overbrace{(AB)}^{\text{red}} C) &= \text{tr}(C \overbrace{(AB)}^{\text{red}}) \\
 &= \text{tr}(\overbrace{(BC)}^{\text{red}} A)
 \end{aligned}$$

Corollaire: Si A, B semblables, $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$

Preuve: $\exists P \in GL_n(K)$ tq $A = P B P^{-1}$

donc $\text{tr}(A) = \text{tr}(P B P^{-1})$

$$= \text{tr}(P^{-1} P B)$$

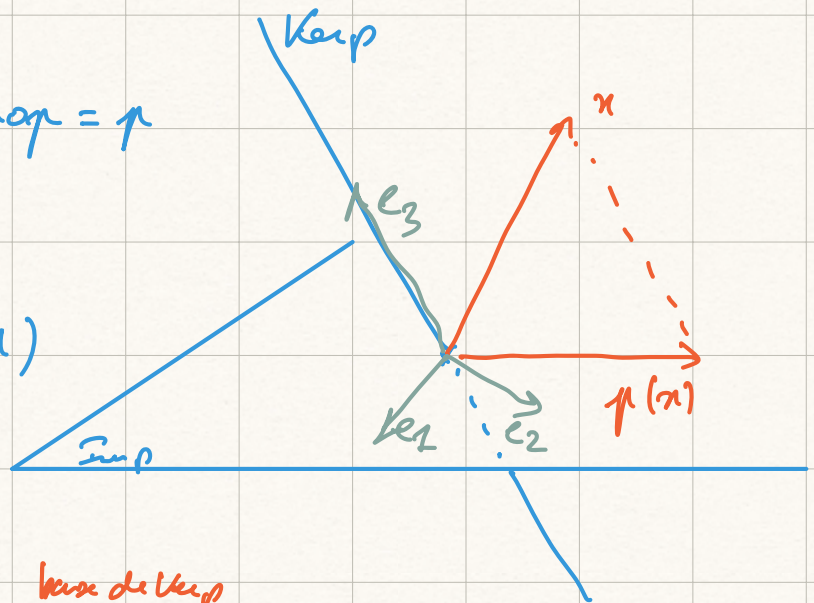
$$= \text{tr}(B)$$

Définition Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ E de dim finie

On appelle $\text{tr}(u)$ la trace de
toute matrice qui représente u .

Proposition. La trace d'un projecteur est égale à son rang.

Soit p un projecteur i.e. $p \circ p = p$
i.e. p est le projecteur
sur $\text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{Id})$
de direction $\text{Ker } p$



Soit $B = (\underbrace{e_1, \dots, e_r}_{\text{base de Im } p}, \underbrace{e_{r+1}, \dots, e_n}_{\text{base de Ker } p})$ base de E

adaptée à $\text{Im } p \oplus \text{Ker } p = E$

$$\text{Mat}(p, B) = \begin{pmatrix} p(e_1) & \dots & p(e_r) & p(e_{r+1}) & \dots & p(e_n) \\ 1 & & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_r \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

$$\text{tr}(p) = r = \dim \text{Im } p = \text{rg}(p)$$

J_{up} est stable par p .

→ Conséquence dans la matrice: $(e_1 \dots e_n)$ base de J_{up}

$$\begin{array}{c} p(e_1) \dots p(e_n) \\ \left(\begin{array}{cc} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

7 Sous-espaces stables

7.1 Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E , et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que F est stable par u si et seulement si $\forall x \in F, u(x) \in F$.

Remarque. On peut écrire $u(F) \subset F$, en utilisant la notion d'image directe d'un ensemble par une application. L'intérêt de cette notion vient surtout du fait que l'on peut alors donner la définition suivante :

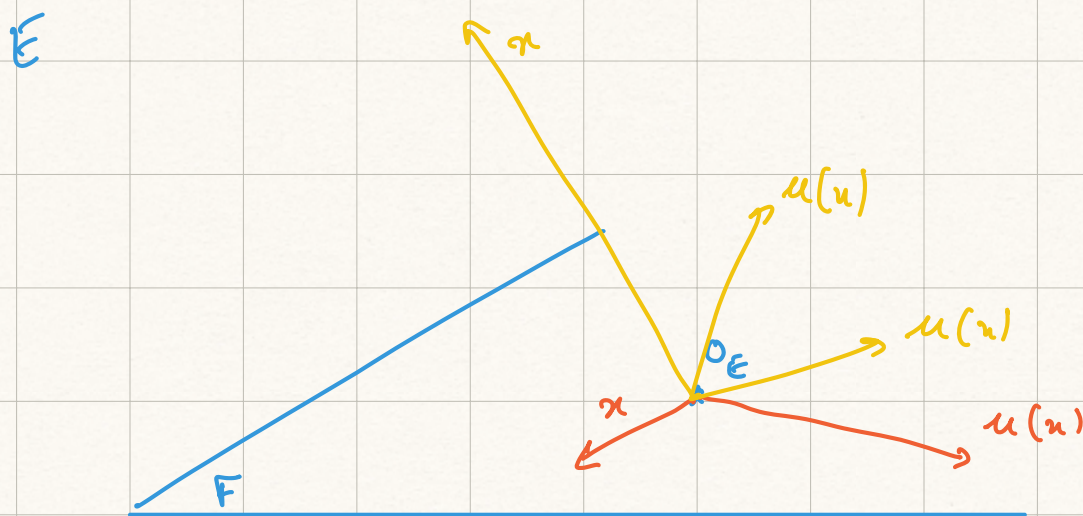
Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . On peut définir :

$$\begin{aligned} u_F : F &\rightarrow F \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

qui est un endomorphisme de F , appelé **endomorphisme induit**.

Remarque. Ce n'est pas exactement la restriction de u à F , puisque le but aussi est réduit à F .

Proposition. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E stables par u , alors $F + G$ et $F \cap G$ sont aussi stables par u .



$$u: E \longrightarrow E$$

$$x \longmapsto u(x)$$

$$u|_F : F \longrightarrow E$$

$$x \longmapsto u(x)$$

restriction de u à F

$$(u|_F)$$

$$u_F$$

$$F$$

$$\longrightarrow F$$

endomorphisme induit

$$x \longmapsto u(x)$$

⚠ on ne peut définir uf que si F est stable par u !!

Théorème.

Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Alors $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont stables par v .

Corollaire. Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ et $\text{Im}(u - \lambda \text{Id})$ sont stables par v .

Montrer $\text{Ker } u$ stable par v

$$u : E \rightarrow E$$

$$v : E \rightarrow E$$

Soit $x \in \text{Ker } u$ Montrer $v(x) \in \text{Ker } u$

$$u(v(x)) = u \circ v(x)$$

$$= v \circ u(x) \quad \text{car } u \circ v = v \circ u$$

$$= v(u(x))$$

$$= v(0) \quad \text{car } x \in \text{Ker } u$$

$$= 0$$

donc $\text{Ker } u$ stable par v .

Montrer $\text{Im } u$ stable par v

$$u : E \rightarrow E$$

$$v : E \rightarrow E$$

Soit $y \in \text{Im } u$ i.e. $\exists x \in E$ tel que $y = u(x)$

Montrer $v(y) \in \text{Im } u$ i.e. $v(y) = u(\text{quelque chose})$

$$v(y) = v(u(x))$$

$$= u(v(x)) \quad \text{car } u \circ v = v \circ u$$

$$\in \text{Im } u$$

$$\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) = E_\lambda(u)$$

Si $u \circ v = v \circ u$ $E_\lambda(u)$ stable par v .

Preuve: $u - \lambda \text{Id}$ et v commutent.

7.2 Stabilité et matrices par blocs

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension n , F un sous-espace vectoriel de dimension p . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F . Soit enfin $u \in \mathcal{L}(E)$. On a la caractérisation suivante :

F est stable par u si et seulement si la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est la matrice de l'endomorphisme induit u_F .

$(e_1 \dots e_p)$ base de F

F stable par u
 $\Rightarrow u(e_1) \dots u(e_p) \in F$

$$\begin{pmatrix} u(e_1) & \dots & u(e_p) & \dots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \text{---} A \text{---} & * & \\ 0 & & * \end{matrix}$

$\begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$

$$u_F : F \longrightarrow F$$

$$x \longmapsto u(x)$$

$$\text{Mat}(u_F, (e_1 \dots e_p))$$

$$\begin{pmatrix} u(e_1) & \dots & u(e_p) \\ & & \\ & & A \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{matrix}$$

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels tels que

$$E = \bigoplus_{i=1}^p F_i. \text{ Soit } u \in \mathcal{L}(E).$$

Les F_i sont tous stables par u si et seulement si la matrice de u dans une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ adaptée à la somme directe est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

où $A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ est la matrice de l'endomorphisme induit u_{F_i} .

Corollaire. Soit E un espace de dimension finie n , de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme laissant stable les n droites vectorielles $F_i = \text{Vect}(e_i)$. Alors, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où chaque $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

8 Annexes

8.1 Rappel : opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes



8.2 Rappel : rang

$$\text{rg}(A) = \dim \text{Im } A = \dim \text{Vect}(C_1 \dots C_n)$$

J_{Im}

8.3 Annexe : matrices équivalentes



pas scalaires

8.4 Annexe : un bloc comme matrice d'une application linéaire composée

