

Pour ve: 210.1, 210.3

Compléments d'algèbre linéaire

Je me souviens

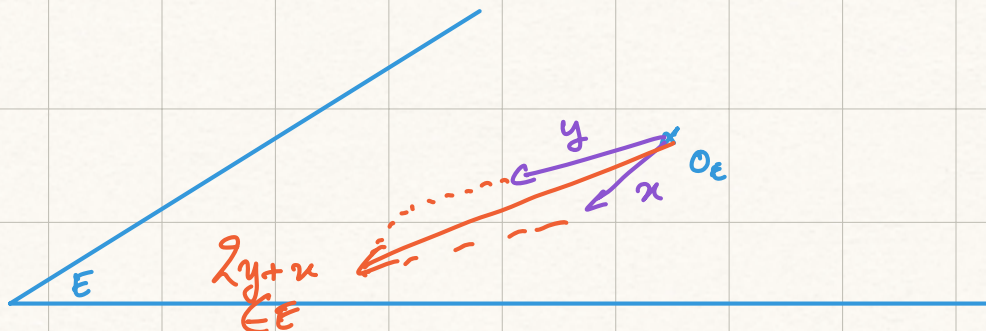
1. Qu'est-ce qu'un **espace vectoriel**? Comment on montre qu'un ensemble est un espace vectoriel?
2. Citer des exemples d'espaces vectoriels.
3. Y a-t-il une bonne représentation géométrique des espaces vectoriels?

1) un ensemble stable par CL

$\left\{ \begin{array}{l} \hookrightarrow \text{loi de ci} + \\ \hookrightarrow \text{loi externe} \cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E \end{array} \right.$

2) plan, droite, espace

~~pas E~~



le vecteur 0_E est dans tout ev.

(2) $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}$ ev sur $\mathbb{R}$

plan vecto, droite vecto

$\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}_3[X]$

$\mathbb{K}(X)$

$M_{np}(\mathbb{K})$

$\mathbb{R}^A = \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^\infty(A, \mathbb{R})$

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$\mathcal{L}(E, F)$

$\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$ -ev. $(1, \sqrt{2})$ est libre

F sous-ev de E

signifie

- $F \subset E$
- $0_E \in F$ (i.e. $F \neq \emptyset$)
- F stable par C.L.

i.e. $\forall x, y \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$\lambda x + \mu y \in F$

4. Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux ?

5. Union, intersection de sous-espaces vectoriels ?

6. Somme de deux sous-espaces vectoriels ?

[4] Montrer $F = G$:

(1) double inclusion

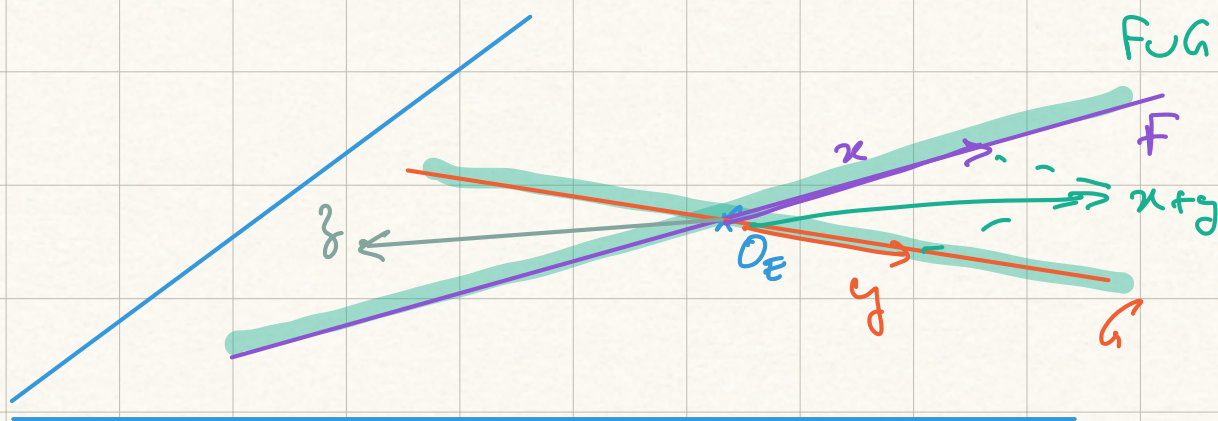
(2) 1 inclusion + égalité des dim finies.

⋮

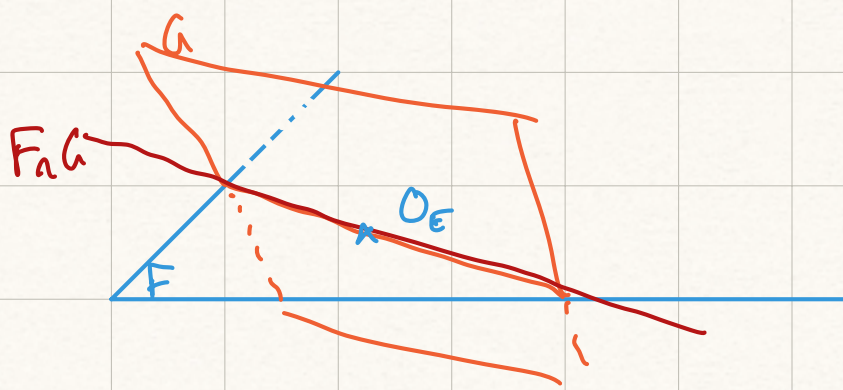
[5]
E

$F \cup G$ en général pas stable par CL.

$$x \in F \cup G \Leftrightarrow x \in F \text{ ou } x \in G$$



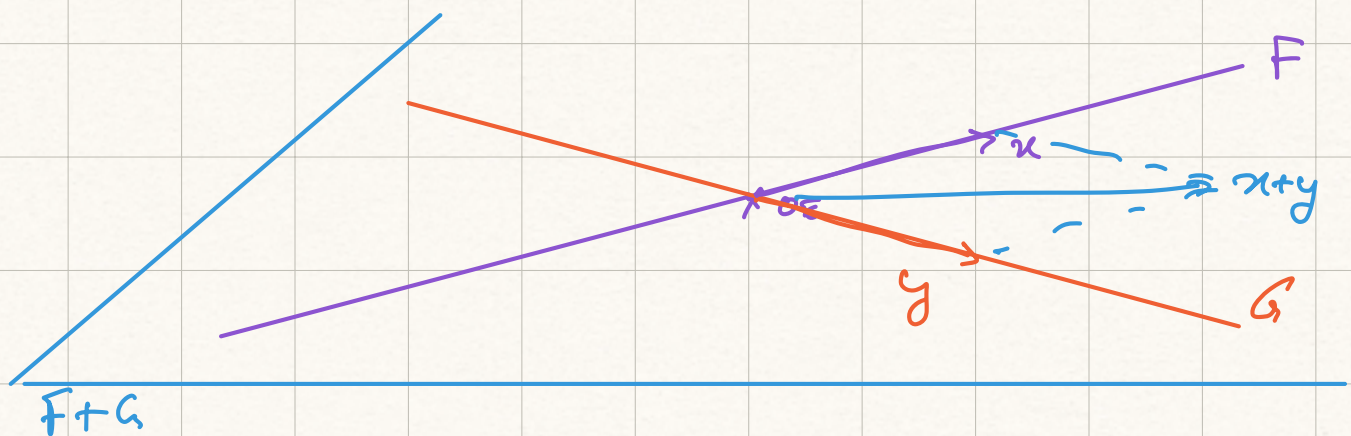
Si F, G sous-ec de E alors $F \cap G$ sous-ec de E



6 F, G sous-espaces de E

$z \in F+G \Leftrightarrow z$ s'écrit $x+y$ où $x \in F$ et $y \in G$

$\exists x \in F, \exists y \in G \mid z = x+y$



$F+G$ est un sous-espace de E

7. Qu'est-ce qu'une **combinaison linéaire** ?

8. Qu'est-ce qu'une famille libre ? Y a-t-il des familles automatiquement libres ?

9. Qu'est-ce qu'une famille liée ? Y a-t-il des familles automatiquement liées ?

[8] $(x_1, \dots, x_n)$ libre

$$\Leftrightarrow \left[\forall \lambda_1 \dots \lambda_n \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \right]$$

$\Leftrightarrow$ (la seule CL nulle des x_k est la CL triviale)

CL $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$

une CL de la famille infini $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$

est une CL d'une sous-famille finie

une CL est TOUJOURS une somme finie

(pas de question de convergence, de limite, distance
 $\mathbb{K}[X]$

$$\left(X^2 \quad X^3 + 1 \right)$$

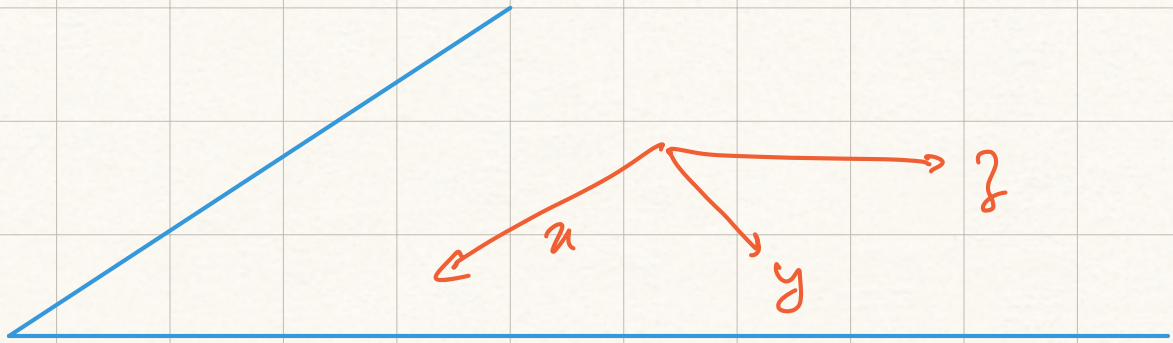
Familles automatiquement libres :

$\rightarrow$ échelonnées (en degré pour des pol.)

(en es coeff pour $M_n(\mathbb{R})$)

2 vecteurs libres $\Leftrightarrow$ non colinéaires

3 vecteurs libres $\Leftrightarrow$ non coplanaires



$$x - y + z = 0$$

(x, y, z) linear

2 are 2 non colinear.

$$\left[\forall \lambda_1 \dots \lambda_n, \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \right]$$

[9] $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ liée $\Leftrightarrow$ elle n'est pas libre
 $(\Leftarrow)$

$$\exists \lambda_1 \dots \lambda_n, \text{ tq } \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0$$

et possible $\lambda_1 \neq 0$ ou $\dots \lambda_n \neq 0$

Automatiquement liée :

Si contient 0_E

$$\left(1 \cdot 0_E + 0 \cdot x_2 \dots = 0 \right)$$

$(n+1)$ vecteurs en dim $n \rightarrow$ liée.

A partir de E ou.

10. Que désigne la notation $\text{Vect}(A)$?

11. Qu'est-ce qu'une famille génératrice ?

$\text{Vect}(A) = \{ \text{ens des CL d'éléments de } A \}$

$= \{ \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p \mid \begin{array}{l} p \in \mathbb{N} \\ a_1 \dots a_p \in A \\ \lambda_1 \dots \lambda_p \in K \end{array} \}$

finie

C'est un sous-espace de E

11 A engendre F signifie $F = \text{Vect}(A)$

12. Qu'est-ce qu'une base? Pourquoi est-ce intéressant?

13. Quand la base est **canonique**, ça veut dire quoi?

12) base = libre et génératrice (en dim finie n)
= libre avec n éléments
= génératrice avec n éléments.

$$\mathbb{R}_2[\tilde{x}] \quad (1, x, x^2)$$

$$\mathbb{R}^3 \quad (1, 0, 0) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 0, 1)$$

$$M_{3,1}(\mathbb{R}) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_n(\mathbb{R}) \quad (E_{ij})_{i,j} \quad E_{ij} = \begin{pmatrix} & & i \\ & 1 & \\ & & \\ j & & \end{pmatrix}$$

Et qcq. $\rightarrow$ pas de base canonique !!

intérêt des bases: coordonnées

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E

$$\phi: \mathbb{K}^n \longrightarrow E$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$$

ϕ est un isomorphisme d.e.v.

14. Citer le théorème de la base incomplète.
15. Citer le théorème de la base extraite.
16. Énoncer la formule de Grassmann. ✓

Dans E de dim finie.

Toute famille libre peut être complétée en une base.

De toute famille génératrice, on peut extraire une base.

17. Qu'est-ce qu'une **application linéaire**, un **endomorphisme**?
D'autres termes dans le même contexte?

$u \in \mathcal{L}(E, F)$ signifie $u: E \rightarrow F$

$$\forall x, y \in E \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

$$u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

(u est à valeurs dans F)

$u \in \mathcal{L}(E)$ endomorphisme $u: E \rightarrow E$
linéaire

u est à valeurs dans E

ie $\forall x \in E, u(x) \in E$

isomorphisme

automorphisme

forme linéaire

$u: E \rightarrow \mathbb{K}$ linéaire

18. Qu'est-ce que le **noyau** de u , à quoi sert-il?

$$u: E \longrightarrow F$$

$$\text{Ker } u = \{ \dots \} = u^{-1}(\{0_F\})$$

$$x \in \text{Ker } u \iff u(x) = 0_F$$

$$u \text{ injective} \iff \text{Ker } u = \{0_E\}$$

$$u \text{ presque injective} \iff \text{Ker } u \text{ petit}$$

$\dim \text{Ker } u$?

19. Qu'est-ce que l'**image** de u , comment s'appelle sa dimension, à quoi sert-elle ?

$$\begin{array}{ccc} u: E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

$$\text{Im } u = \{ \dots \} = u^{\rightarrow}(E)$$

$$y \in \text{Im } u \iff \exists x \in E \text{ tq } y = u(x)$$

$$\text{rg } u = \dim \text{Im } u$$

20. Y a-t-il un lien entre noyau et image de u ?

$$u: E \rightarrow F$$

Aue leli du sang

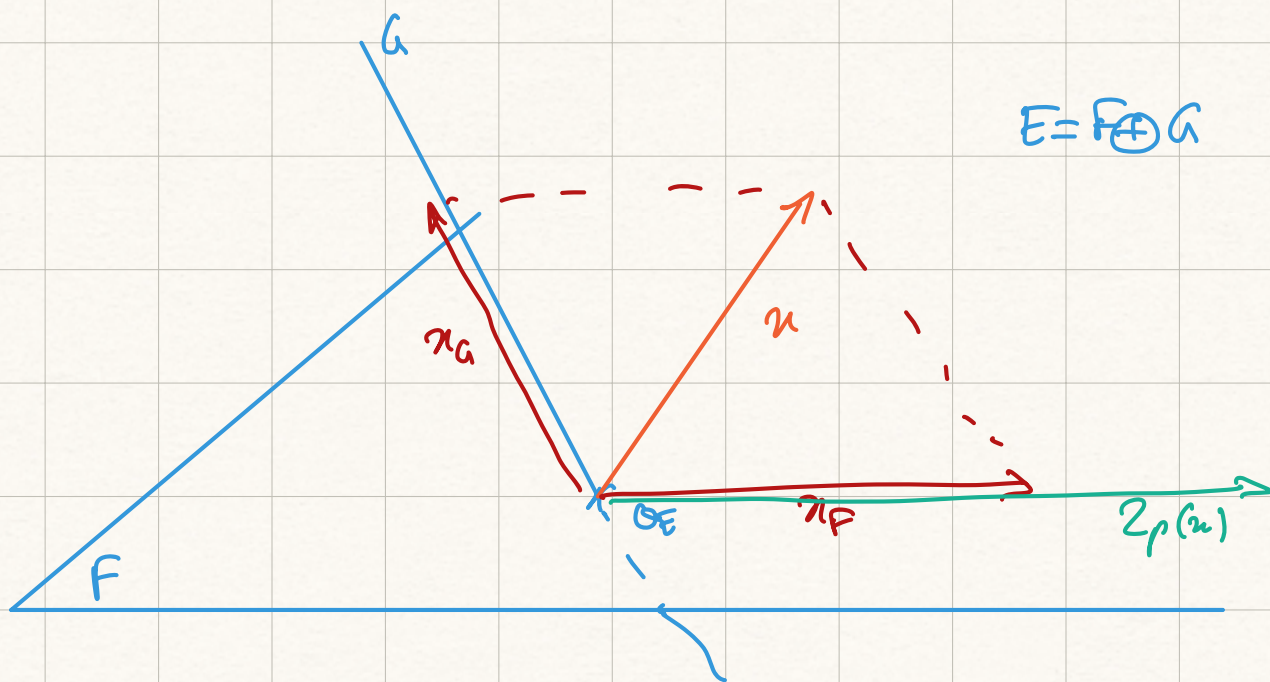
$$\dim E = \dim \text{Kern} + \text{rg } u$$

u endomorphisme de E

$$u: E \longrightarrow E$$

en général $\text{Im } n \oplus \text{Ker } n = E$

$$\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E$$



$$\mu: E \rightarrow E$$

$$x \mapsto x_f$$

$$\text{Ker } p = G$$

$$\text{Im } p = F$$

21. Que signifie $u \circ v = 0$?

$$\forall x \quad u(v(x)) = 0$$

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{v} & F & \xrightarrow{u} & G \\ x & \mapsto & v(x) & \mapsto & u(v(x)) \end{array}$$

$$\text{Im } v \subset \text{Ker } u$$

Preuve: $\Rightarrow$
 $\Leftarrow$

$$u \circ v = 0$$

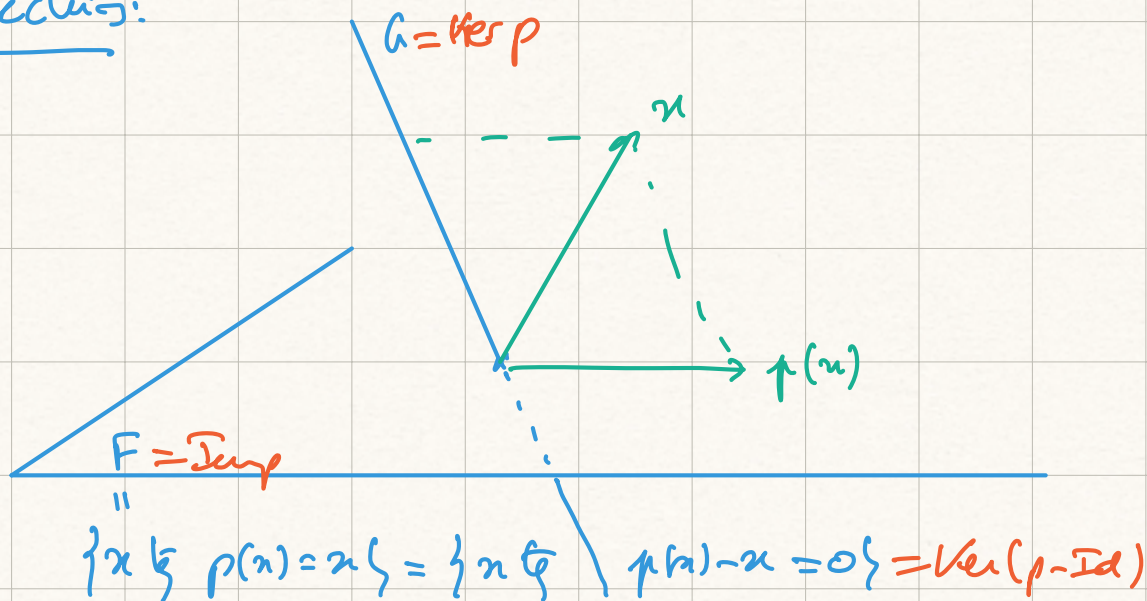
22. Qu'est-ce qu'une homothétie?

23. Que dire à propos des **projecteurs**? des **symétries**?

homothétie

$$\left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array} \right) = \lambda \text{Id}_E$$

projecteurs:



- On suppose $E = F \oplus G$

On définit projection sur F de direction G

$$p: E \longrightarrow E$$

$x \longmapsto$ l'unique x_F tel

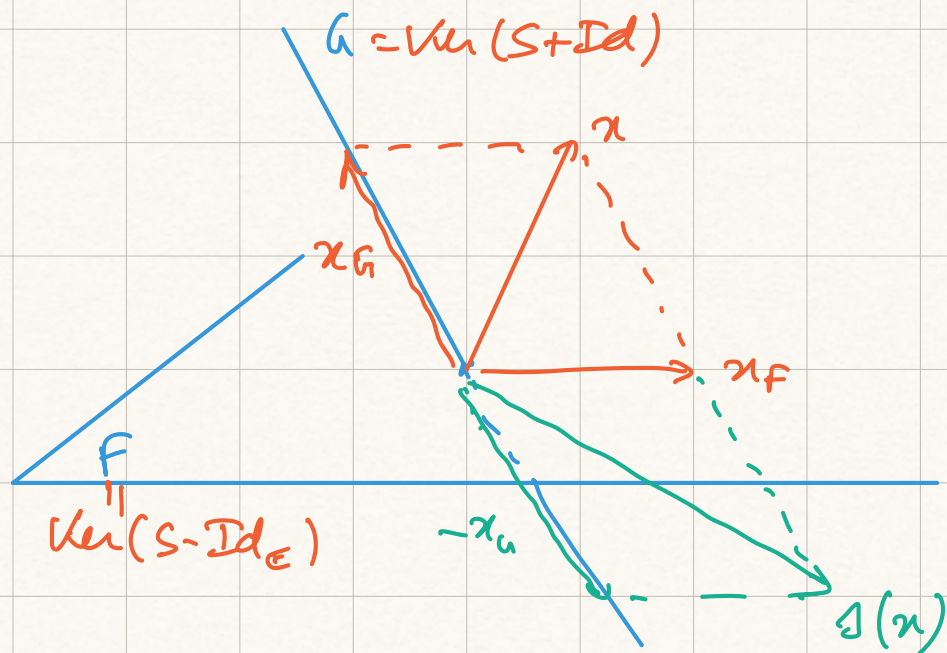
$$x = x_F + x_G \in F \oplus G$$

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel $u \circ u = u$

lien avec ls 2:

$\left\{ \begin{array}{l} \underline{S} \text{ non} = u, \\ \underline{\text{alors}} \text{ } u \text{ est la projection sur } (\text{Jmp}) \text{ Ker}(p - \text{Id}) \\ \text{de direction Ker } p \end{array} \right.$

Symétries



• $E = F \oplus G$

symétrie par rapport à F de direction G

$$\Delta: F \longrightarrow E$$

$$x \longmapsto x_F - x_G$$

équivalents

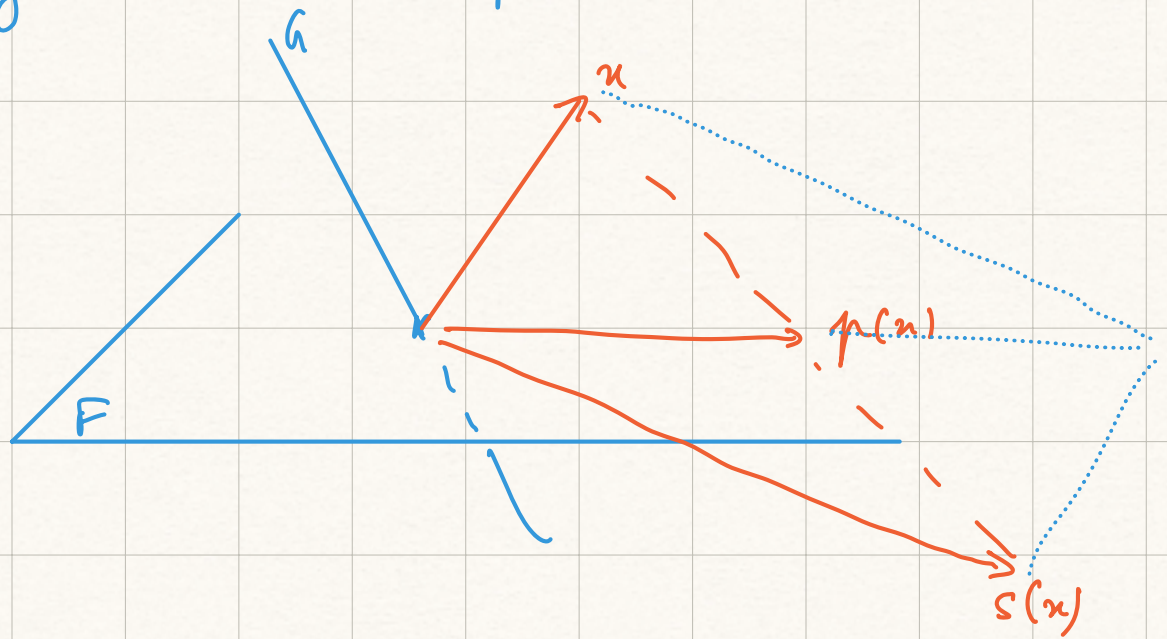
• $u \in \mathcal{L}(E) \quad u \circ u = \text{Id}_E$

c'est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$

de direction $\text{Ker}(u + \text{Id}_E)$

Lien entre projecteur et symétrie

On garde les notations précédentes.



$$2p(x) = x + s(x)$$

$$s = 2p - \text{Id}_E$$

$$p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$$