Pour me : 520.17, 520.23 Colloscope

Savoir faire 520.6, 520.7, 520.9

~~Jacquet ; Rouillard ; Sauvage - Soudat~~

1 Technique de comparaison série-intégrale

Exemple. Déterminer un équivalent simple de $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_n$.

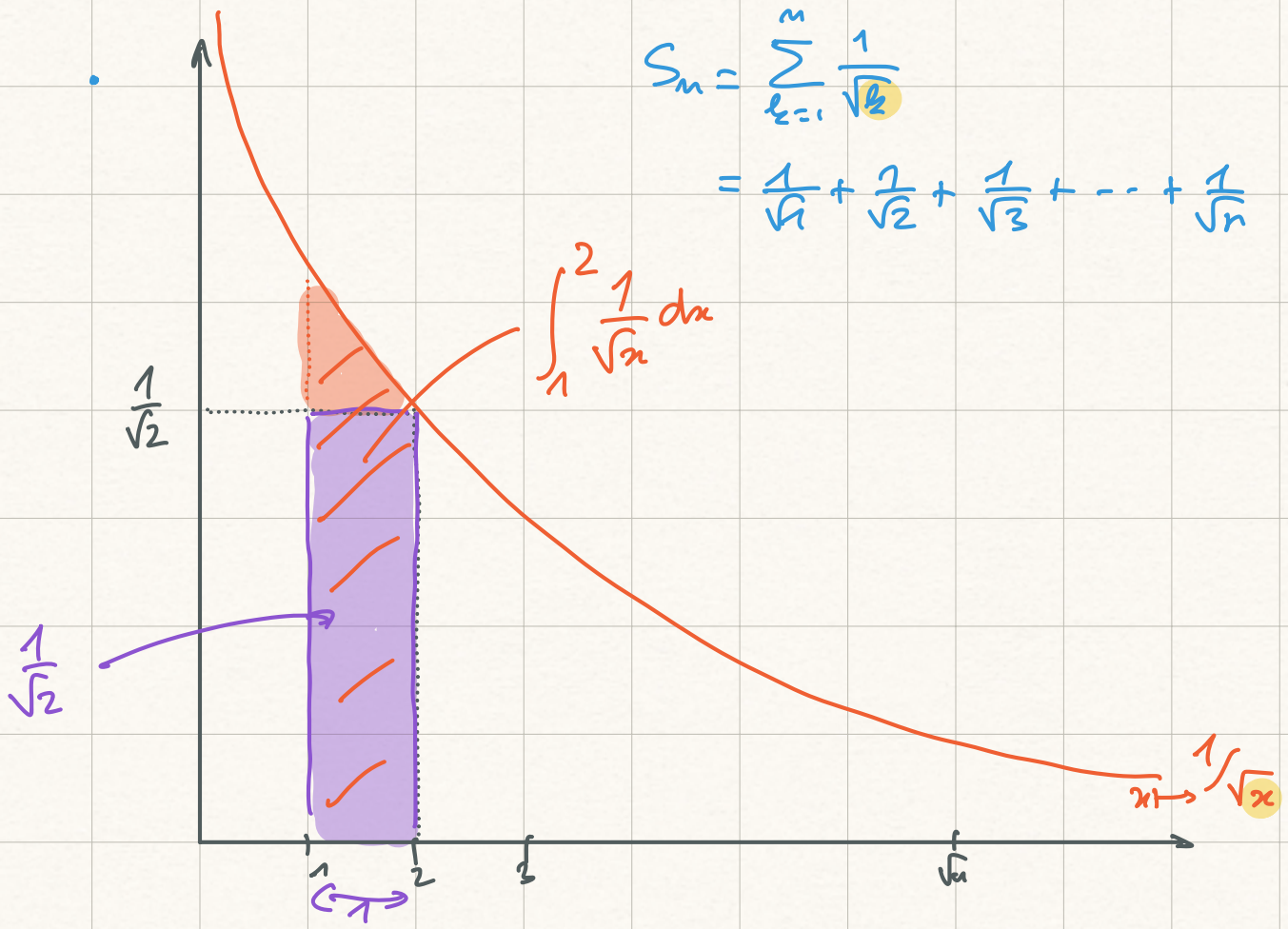
- $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$ $\quad 1/2 < 1$

  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ de Riemann divergente

  à termes positifs donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

- $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

  $= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$



$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante

donc $\forall x \in [k, k+1]$ $\quad \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$

Donc

$$\underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}}\,dx}_{= \frac{1}{\sqrt{k+1}}} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq \underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}}\,dx}_{= \frac{1}{\sqrt{k}}}$$

Ceci est vrai $\forall k$, donc

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}}}_{= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = S_{n+1} - 1} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx}_{= \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}_{S_n}$$

En pratique on rédige :

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$

donc par comparaison somme / intégrale :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

⚠ cet encadrement doit être vrai !

et accompagné d'une figure.

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Intérêt de la comp. série/intégrale

On "remplace" une somme par une intégrale

donc on a plus d'outils !

↳ calcul de primitive

↳ int par parties

↳ chgt de variable

Terminons l'exemple : $x^{-1/2}$ $\quad 2x^{1/2}$

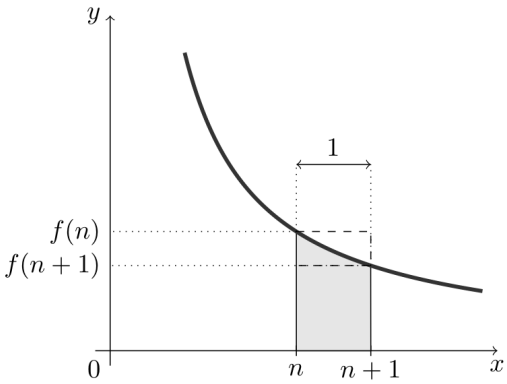
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

ie $$\underbrace{\left[2\sqrt{x}\right]_1^{n+1}}_{\substack{= \\ 2\sqrt{n+1}-2 \\ \sim \\ 2\sqrt{n}}} \leq S_n \leq 1 + \underbrace{\left[2\sqrt{x}\right]_1^{n}}_{\substack{= \\ 2\sqrt{n}-1 \\ \underset{+\infty}{\sim} \\ 2\sqrt{n}}}$$

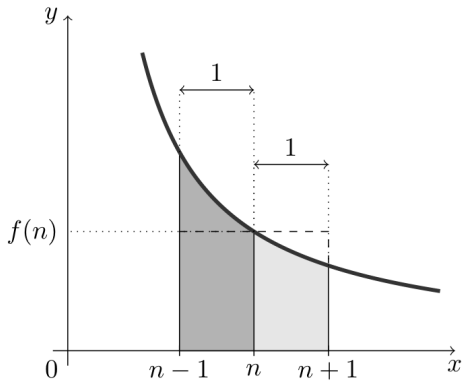
par encadrement, $\underline{S_n \sim 2\sqrt{n}}$

Technique de comparaison. Soit f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante.

- Encadrements élémentaires : par décroissance de f, on a :



$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$$



$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n) \quad \text{et} \quad \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0-1}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- Si la série $\sum f(n)$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

- Si l'intégrale $\displaystyle\int^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors la série $\sum f(n)$ converge.

- En cas de convergence, on a un encadrement des restes de $\sum f(n)$:

$$\int_{n_0+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

  qui permet souvent d'obtenir un équivalent.

- En cas de divergence, l'encadrement déjà vu des sommes partielles de $\sum f(n)$ permet souvent d'obtenir un équivalent.

- Ces inégalités s'adaptent au cas où f est croissante.
- On présentera toujours un schéma pour illustrer les inégalités annoncées.

3 Produit de Cauchy de deux séries

Définition. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries la série $\sum w_n$ où :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Remarque. *Dans cette définition, toutes les séries sont indexées à partir de 0. En pratique, on nomme les séries concernées, et on les complètent éventuellement avec des termes nulles pour coïncider avec la définition.*

Remarque. *On peut aussi noter* $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

$E = \{ \sum u_n \ , \ (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \}$

Addition : $(\sum u_n) + (\sum v_n) = \sum (u_n + v_n)$

le + de E — le + de $\mathbb{R}$

loi externe $\lambda \cdot (\sum u_n) = \sum (\lambda \cdot u_n)$

multiplication ? $\cancel{(\sum u_n) \times (\sum v_n) = \sum (u_n \times v_n)}$

↳ ~~ça ne sert à rien.~~

Sommes ? On veut que la somme de la série produit soit le produit des deux sommes.

Théorème.

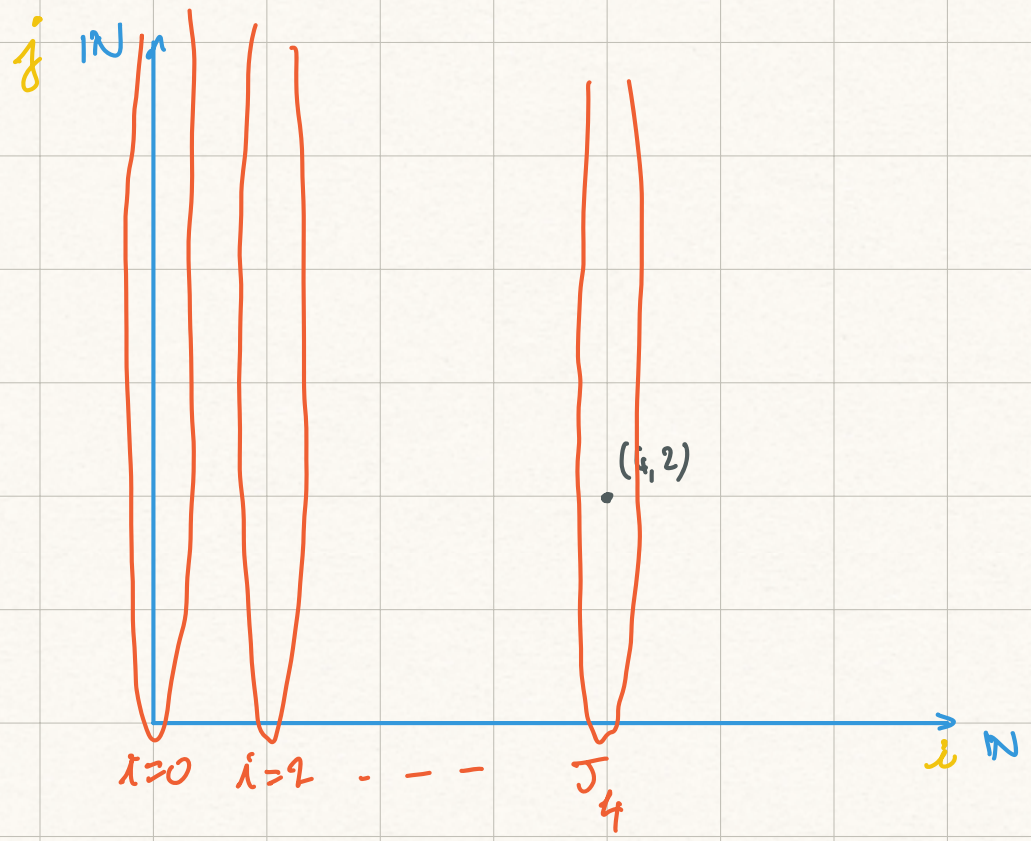
On conserve les notations de la définition.
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors $\sum w_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Preuve : Considérons la famille

$$(u_i v_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$$

- Mqe $(u_i v_j)_{ij}$ est sommable



On note $J_i = \{(i,j),\ j\in\mathbb{N}\}$

On a $\mathbb{N}^2 = \bigcup_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ \text{disjointe}}} J_i$

$(u_i v_j)_{ij}$ sommable ssi $\begin{cases} \forall i \quad (u_i v_j)_{J_i} \text{ sommable} \\ \left(\sum_{J_i} u_i v_j\right)_{i\in\mathbb{N}} \text{ sommable} \end{cases}$

* Pour $i \in \mathbb{N}$ $\quad |u_i v_j| = \underbrace{|u_i|}_{\text{cste}} \underbrace{|v_j|}_{\text{hg série cv par hyp}}$

donc $\sum_j |u_i v_j|$ converge

donc $(u_i v_j)_{J_i}$ sommable

* $$\left|\sum_{J_i} u_i v_j\right| = \left|\sum_{j \in \mathbb{N}} u_i v_j\right|$$
$$\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} |u_i| |v_j|$$
$$= \underbrace{|u_i|}_{\text{hg série cv}} \underbrace{\sum_{j \in \mathbb{N}} |v_j|}_{\text{cste}}$$

donc $\sum \left|\sum_{J_i} u_i v_j\right|$ cv

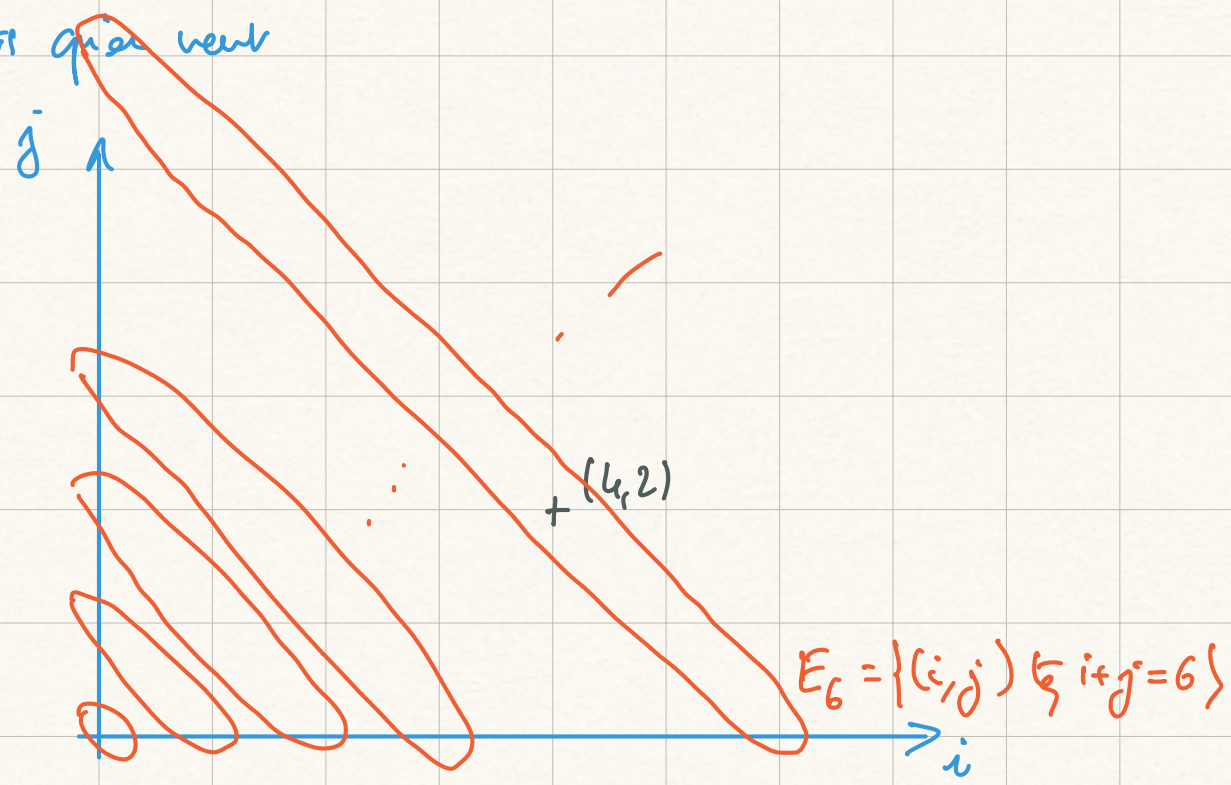
ie $(u_i v_j)_{i,j}$ est sommable.

Bon, en fait, on a écrit :

On calcule, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} |u_i v_j| = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |u_i v_j| \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(|u_i| \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |v_j|} \right)$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{n} |v_j| \right) \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i| \right)$$
$$< +\infty$$

Comme $(u_i v_j)_{i,j}$ est sommable, on fait les paquets qu'on veut



On note $E_k = \{(i,j) \text{ tq } i+j=k\}$

Par paquets $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_i v_j = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{(i,j)\in E_k} u_i v_j \right)$

et cette série cv absolument.

<u>Mais</u> $\displaystyle w_k = \sum_{(i,j)\in E_k} u_i v_j$

$$= \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} u_i v_j$$

$$= \sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i}$$ ← tg du produit de Cauchy.

Exemple. Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrer que : $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$.

On admet pour l'instant que $\sum \frac{z^n}{n!}$ cv absolument $\forall z$

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$

Notons $u_n = \frac{z^n}{n!}$ et $v_n = \frac{z'^n}{n!}$

On pose $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ kg du produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}$$

$\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k z'^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n!} (z+z')^n \quad \text{par le binôme.}$$

Or $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z'^n}{n!}$ cv absolument

donc $\sum w_n$ cv absolument

et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$

ie $\exp(z+z') = \exp(z) \exp(z')$

Exemple. Étudier la série de terme général $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

Posons $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$ et $v_n = \frac{1}{2^n}$

ainsi $\forall n \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$

On reconnaît le produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Or $\sum u_n$ cv absolument (Riemann), $\sum v_n$ cv absolument (géométrique)

Donc $\sum w_n$ cv absolument

et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$

$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{6} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{3}$$

Astuce

4 ~~Règle~~ de d'Alembert

Remarque. *Cette règle est mentionnée dans le programme, mais c'est un résultat peu utile pour l'étude des séries numériques, et il ne doit pas cacher le principe du résultat : on compare le terme général de la série à étudier à une série de référence – ici, une série géométrique.*

~~Règle~~ de d'Alembert. Soit $\sum u_n$ une série numérique dont le terme général ne s'annule pas. On suppose que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ n'a pas de limite, on ne conclut pas.

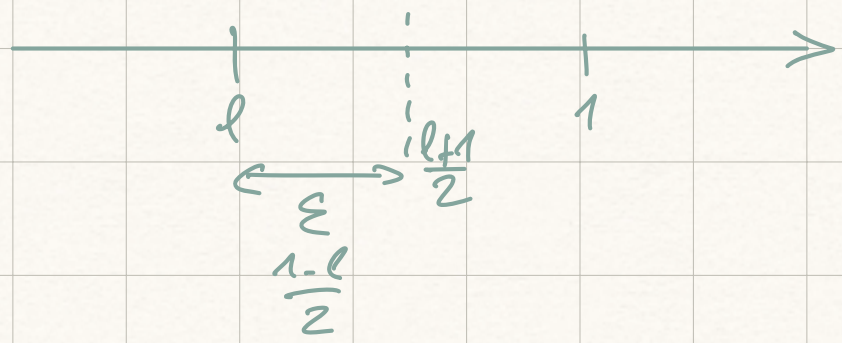
Remarque

Heads up ! Pour étudier la cv de $\sum u_n$, on commence par essayer de comparer u_n au v.g d'une série de référence (Riemann, géométrique, exponentielle)

D'Alembert comparaison à une série géométrique seulement.

Preuve :

- On suppose $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow \ell < 1$



Par déf de $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow \ell$ avec $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$

donc $\exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$ $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \frac{\ell+1}{2}$

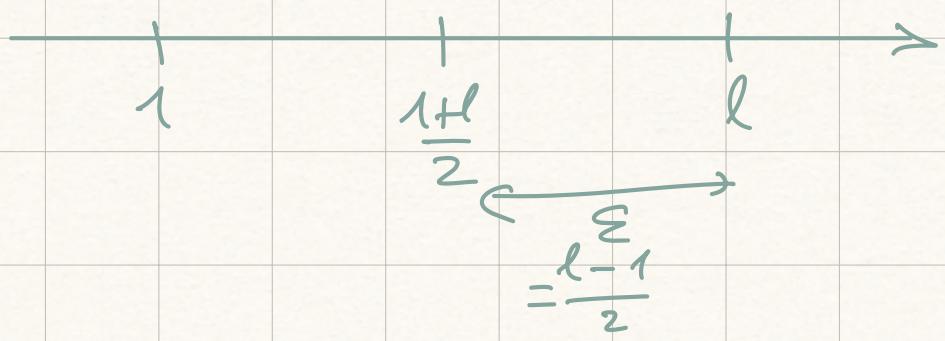
ie $|u_{n+1}| \leq \left(\frac{\ell+1}{2}\right)|u_n|$

et donc $\forall n \geq n_0$ $|u_n| \leq |u_{n_0}|\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0}$ par récurrence

t.q d'une série géométrique cv car $\frac{\ell+1}{2} < 1$

Par comparaison, $\sum u_n$ cv absolument.

- On suppose $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow \ell > 1$



Par déf de $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[+\infty]{} \ell$ avec $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2} > 0$

d'où n_0 tq $\forall n \geq n_0$ $\frac{1+\ell}{2} \leq \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$

donc, par réc, $\forall n \geq n_0$ $|u_n| \geq |u_{n_0}|\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0}$

$\downarrow +\infty$

$+\infty$

(suite géométrique où $\frac{1+\ell}{2} > 1$)

par minoration, $|u_n| \longrightarrow +\infty$

donc $\sum u_n$ div. grossièrement.

Exemple. Peut-on appliquer la règle de d'Alembert aux séries suivantes ?

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n!} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^2}{2^n}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n!}$$

M1. $\left| \dfrac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \dfrac{1}{n+1}$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$

donc, par la règle de d'Alembert, $\sum \frac{1}{n!}$ cv.

M2. $\left| \dfrac{1}{n!} \right| \leq \dfrac{1}{n^2}$ au voisinage de $+\infty$

$\uparrow$ tg d'une série cv

donc $\sum \frac{1}{n!}$ cv absolument.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$$

$$\int^{n} \frac{1}{t}\,dt = \ln(n) \dots \longrightarrow +\infty$$

- $$\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[+\infty]{} 1$$

~~oui, mais est 1 car $1+\frac{1}{n} > 1$~~

la règle ne s'applique pas.

-

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$$

$\int^{n} \frac{1}{t^2}\,dt$ de l'ordre de $\frac{1}{n}$

$$\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right| = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Pas de règle de d'Alembert.

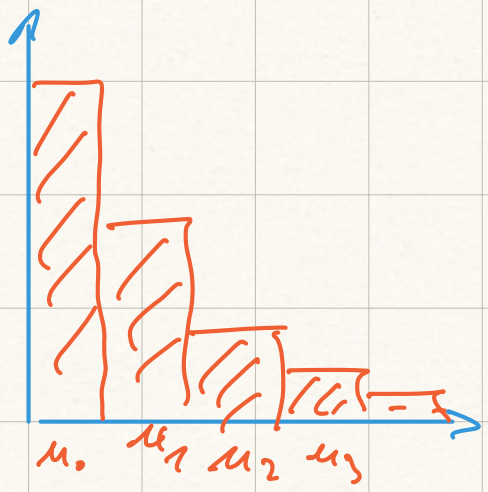
$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^2}{2^n}$$ et $\exp(z)$?

M1. $$\left|\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}\right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} < 1$$

donc $\sum u_n$ cv absolument par la règle de d'Alembert.

M2. Au voisinage de $+\infty$:



$$\frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2^{n/2}} \cdot \frac{n^2}{2^{n/2}}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \cdot \underbrace{\frac{n^2}{(\sqrt{2})^n}}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \cdot o(1)$$

$$= o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$$

t.g d'une série géom. absolument convergente.

On a définit $\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}$

<u>Montrer la cv absolue $\forall z \in \mathbb{C}$.</u>

- Si $z = 0$, la série cv absolument.
- Si $z \neq 0$, on applique la règle de d'Alembert :

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 < 1$$

donc $\sum \frac{z^n}{n!}$ cv absolument.