

Pour la 7^o 1 exercice à rédiger, par ex 610.21 

Pour ma: 520.1, 520.2, 520.3



Savoir faire 520.8, 520.10 (classeur ?)

Pour je : 1 DM à envoyer

<http://envoi.lamartin.fr>

Séries numériques

1. Qu'est-ce qu'une série numérique ?
2. Quelles sont les notations associées ?

On ne le définit pas.

Si (u_n) est un suite, on considère

la série de t.g. u_n : $\sum u_n$

$$\sum_{k=0}^n u_k$$

somme partielle

$$\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

suite des sommes partielles

$\sum u_n$ converge signifie $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_n$ converge

Dans ce cas, la limite se note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$

la somme de la série

Si $\sum u_n$ converge, on reste à l'ordre n et

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k$$

R_n S S_n

3. Que signifie « série grossièrement divergente » ?

4. « Étudier une série », ça veut dire quoi ?

H: S $\sum u_n$ converge

Alors $u_n \xrightarrow{+ \infty} 0$

Preuve: $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, on suppose $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$

$$\forall n \quad u_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0$$

Si $(u_n)_n$ ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge
on dit $\sum u_n$ diverge grossièrement.

(i) Étudier une série c'est dire si elle est convergente
(calculer sa somme, c'est souvent
difficile)

5. Le cas de la série géométrique ?

série de référence

$$\sum u_0 q^n \quad (1^{\text{er}} \text{ terme } u_0, \text{ raison } q)$$

Converge ssi $|q| < 1$

Dans ce cas:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_0 q^n = u_0 q^0 \frac{1}{1 - q}$$

pour $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

6. Le cas des séries de Riemann ?

↑ séries de référence !

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{ou} \quad \underline{\text{si}} \quad \alpha > 1$$

La somme ~~en cas de convergence~~ ?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

7. C'est quoi, le « lien suite-série » ?

On étudier $(u_n)_n$,

On étudie plutôt $\sum u_{n+1} - u_n$

Elles sont de même nature (ou on dir)

Intuitif plus facile d'étudier la cv d'une série

En effet:

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$$

En cas de convergence,

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k)$$

8. Comment étudier une série à termes réels positifs ?

Comparons le t.g. à celui d'une série de réf.

- Si $0 \leq u_n \leq v_n$

et $\sum v_n$ converge (par ex $\sum \frac{1}{n^2}$)

donc $\sum u_n$ converge

si $\sum v_n$ diverge, pas de conclure.

- Si $u_n = o(v_n)$ (ou $u_n = O(v_n)$)

u_n et $v_n \geq 0$

$\sum v_n$ converge

alors $\sum u_n$ converge

Si $\sum v_n$ diverge, pas de conclure.

- Si $u_n \sim v_n$

u_n et $v_n \geq 0$

$\sum v_n$ converge

alors $\sum u_n$ cv

Si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge.

idée 1

- retour à l'étude de la suite des sous-partielles
(Comparaison à une intégrale ...)

Trouver la
1^{re} idée.

9. Comment étudier une série numériques, à termes réels ou complexes ?

- On étudie la convergence absolue de $\sum u_n$
i.e la cv de $\sum |u_n|$

Théorème: Si $\sum u_n$ cv absolument
alors $\sum u_n$ converge.

Résultat:

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$
 $\sum v_n$ cv absolument
alors $\sum u_n$ cv absolument

Comparaison de
la "taille"
de u_n et de v_n
 $|u_n| = o(|v_n|)$

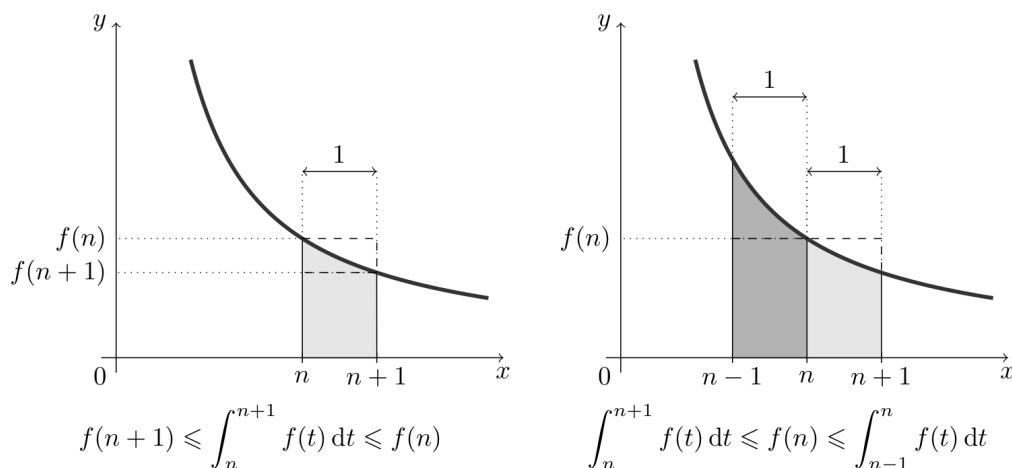
- Si $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$
 $\sum v_n$ cv absolument
alors $\sum u_n$ cv absolument
- Si $|u_n| \leq v_n$
 $\sum v_n$ cv absolument
alors $\sum u_n$ cv absolument

1 Technique de comparaison série-intégrale

Exemple. Déterminer un équivalent simple de $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_n$.

Technique de comparaison. Soit f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante.

- Encadrements élémentaires : par décroissance de f , on a :



- En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{n=n_0+1}^N f(n) \leq \int_{n_0}^N f(t) dt \leq \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n) \quad \text{et} \quad \int_{n_0}^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{n=n_0}^N f(n) \leq \int_{n_0-1}^N f(t) dt$$

- Si la série $\sum f(n)$ converge, alors l'intégrale $\int^{\rightarrow+\infty} f(t) dt$ converge.

- Si l'intégrale $\int^{\rightarrow+\infty} f(t) dt$ converge, alors la série $\sum f(n)$ converge.

- En cas de convergence, on a un encadrement des restes de $\sum f(n)$:

$$\int_{n_0+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$$

qui permet souvent d'obtenir un équivalent.

- En cas de divergence, l'encadrement déjà vu des sommes partielles de $\sum f(n)$ permet souvent d'obtenir un équivalent.

- Ces inégalités s'adaptent au cas où f est croissante.
- On présentera toujours un schéma pour illustrer les inégalités annoncées.

2 Méthode d'éclatement

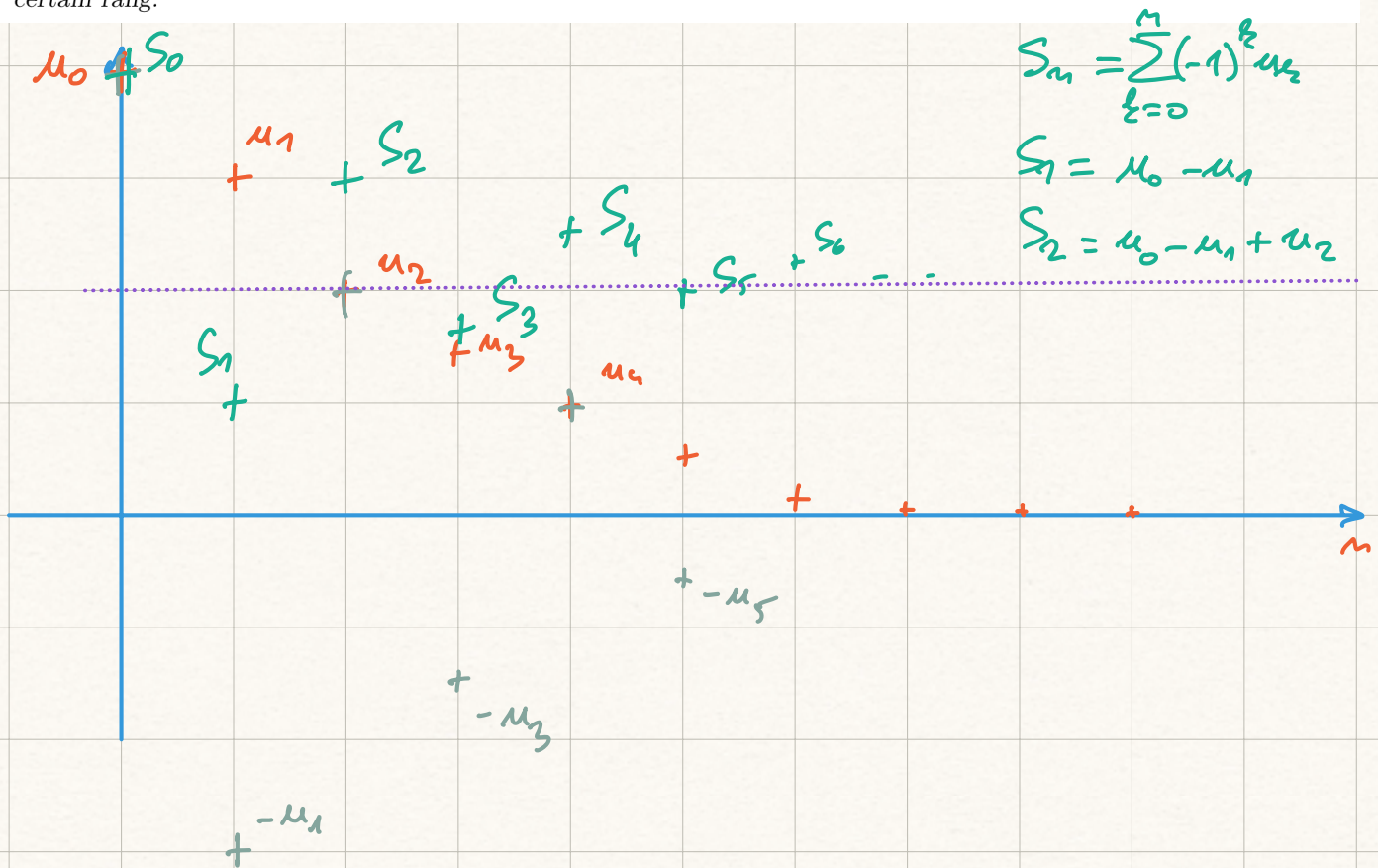
Théorème des séries alternées.

Si $(u_n)_n$ est positive, décroissante et de limite nulle,
alors la série alternée $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Résultat complémentaire.

Si la série alternée $\sum (-1)^n u_n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, alors pour tout n , le reste R_n a le signe de $(-1)^{n+1} u_{n+1}$ et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.
D'autre part, la somme S est encadrée par deux sommes partielles successives.

Remarque. Le théorème s'applique aussi à $\sum (-1)^{n+1} u_n$, ou alors si les hypothèses ne sont vérifiées qu'à partir d'un certain rang.



On étudie la suite des sommes partielles $(S_n)_n$

$$\text{où } S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$$

Onque $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacents

$$\begin{aligned} \bullet \quad S_{2n+2} - S_{2n} &= u_{2n+2} - u_{2n+1} \\ &\leq 0 \quad \text{car } (u_n)_n \searrow \end{aligned}$$

- $$S_{2n+3} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{2n+2}$$

$$\geq 0 \quad \text{car } (u_n)_n \searrow$$

- $$S_{2n} - S_{2n+1} = -(-1)^{2n+1} u_{2n+1}$$

$$= u_{2n+1}$$

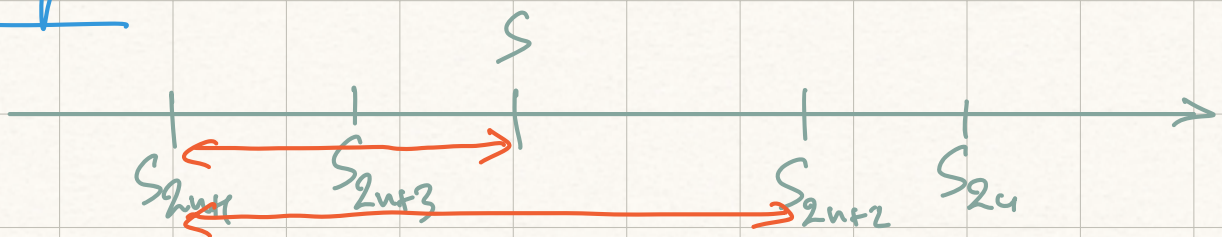
$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ainsi $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes

donc $\exists S$ tq $S_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$ et $S_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$

Donc $(S_n)_n$ converge, ie $\sum (-1)^n e_n$ cv

Complément



Hn $S_{2n+1} \leq S_{2n+3} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$

S_{2n+1} est une valeur approchée de S :

$$|S - S_{2n+1}| = |R_{2n+1}|$$

$$\leq S_{2n+2} - S_{2n+1}$$

$$= u_{2n+2}$$

Preuf: $\left| \sum_{k=2n+2}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| \leq |u_{2n+2}|$

On retient: Si le th. spécial s'applique (!!)

le rest est majoré en val absolu par son 1^{er} terme, et est du signe du 1^{er} terme

Exemple:

Étudier $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

- $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$ tg. série abs. convergente (Riemann, $\alpha=2>1$)

donc $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ cv absolument, donc converge.

- $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ne cv pas absolument.

$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)_n$ positive, décroissante, de limite nulle
donc par le th de séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ cv

Rug: $\frac{1}{\sqrt{n}}$ que se passe-t-il si $n \rightarrow$

Résultat: Séries de Riemann-alternées.

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad \text{car pour } \alpha > 0$$

1) Attention! Ce ne sont pas des séries de référence!!
Ne servent pas dans le cas par comparaison.

Exemple. ~~Peut-on appliquer le théorème des séries alternées à la série de terme général~~ $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$?

Étudier $\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$

idée 1 car absolue? $|u_n| = \frac{1}{|n + (-1)^{n+1}|}$

$n \geq 2$

$$= \frac{1}{n + (-1)^{n+1}}$$

$$\sim \frac{1}{n} \quad \text{lg série div}$$

donc $\sum u_n$ ne converge pas absolument. Zut!

idée 2 :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n + o(n)}$$

$$\sim \frac{(-1)^n}{n}$$

hg série de Riemann - alternée
convergente

~~donc $\sum u_n$ converge aussi~~

idée 3 : $\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$ $(-1)^n \frac{1}{n + (-1)^{n+1}}$

pas $\rightarrow$

zur.

idée 4 : $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$

$$= \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} \left[1 - \frac{(-1)^{n+1}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{v_n} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{w_n} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{z_n}$$

on applique la
méthode d'éclatement

$\sum v_n$ ou (série de Riemann alternée)

$\sum v_n$ cv (série de Riemann cv)

$\sum v_n$ cv absolument (par comparaison à $\sum \frac{1}{n^2}$)

Raffinement.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

↑
s.g. série
de Riemann
alternée
cv

↑ s.g. série absolument convergente

Et à celle de terme général $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$?

Autour de $n \rightarrow +\infty$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

↑
série alternée
(Leibniz)

↑
série
div.

↑
série
absolument convergente
 $3/2 > 1$

donc $\sum u_n$ diverge.

3 Produit de Cauchy de deux séries

Définition. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries la série $\sum w_n$ où :

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

Remarque. Dans cette définition, toutes les séries sont indexées à partir de 0. En pratique, on nomme les séries concernées, et on les complètent éventuellement avec des termes nulles pour coïncider avec la définition.

Remarque. On peut aussi noter $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

Théorème.

On conserve les notations de la définition.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors $\sum w_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Exemple. Étudier la série de terme général $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

Exemple. Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrer que : $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$.

4 Règle de d'Alembert

Remarque. Cette règle est mentionnée dans le programme, mais c'est un résultat peu utile pour l'étude des séries numériques, et il ne doit pas cacher le principe du résultat : on compare le terme général de la série à étudier à une série de référence – ici, une série géométrique.

Règle de d'Alembert. Soit $\sum u_n$ une série numérique dont le terme général ne s'annule pas. On suppose que

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \bar{\mathbb{R}}.$$

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemple. Peut-on appliquer la règle de d'Alembert aux séries suivantes ?

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n^2}{2^n}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n^2}{2^n}$$

