Pour vc : 510.1, 510.2, 510.8

http://envoi.lamartin.fr

Savoir faire 510.5, 510.6

Suites numériques

1.1 Récurrence

1. Raconter ce qu'est une récurrence.
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme T_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(nx) = T_n(\cos x)$.

$n(-)\sin(nx) = -\sin x\, T_n'(\cos x)$

① mode de raisonnement pour justifier une prop. qui dépend de $n \in \mathbb{N}$

Hérédité
Initialisation

② $\cos((n+1)x) = \cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x$

$\cos((n-1)x) = \cos(nx)\cos x + \sin(nx)\sin x$

$\underbrace{\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos(nx)\cos x}$

rel. de récurrence double.

Montrons par récurrence double :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists T_n \in \mathbb{R}[X] \quad tq \quad \forall x \quad \cos(nx) = T_n(\cos x)$

- Pour $n=0$ $\quad \cos(0x) = 1 = T_0(\cos x)$ en posant $T_0 = 1$

- Pour $n=1$

(M1) $\quad \forall x \quad \cos(1x) = \cos(x)$ donc $T_1 = X$ convient

(M2) $\quad \forall x \quad \cos(1x) = \cos(x)$

$$= T_1(\cos x) \quad \text{en posant } T_1 = X$$

- Soit n

On suppose $\exists T_n, T_{n-1} \in \mathbb{R}[X]$

tq $\cos(nx) = T_n(\cos x)$

$\cos((n-1)x) = T_{n-1}(\cos x)$

Alors : $\forall x$

$$\cos((n+1)x) = 2\cos(nx)\cos x - \cos((n-1)x)$$

$$= 2T_n(\cos x)\cdot\cos x - T_{n-1}(\cos x)$$

par H.R.

$$= T_{n+1}(\cos x)$$

en posant $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$

$T_{n+1}(X) = 2 \times T_n(X) - T_{n-1}(X)$

- Ccl ...

1.2 Suite numérique, convergence, divergence

3. C'est quoi, une suite numérique ?
4. On peut plutôt parler de famille ?

③ c'est une suite de termes avec des valeurs.

dépend d'un indice $n \in \mathbb{N}$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite — u_n le n^e terme — $\forall n\ u_n \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

(on aura des suites à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$)

une suite : $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$

$n \longmapsto u_n = u(n)$

$u = (u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots)$

5. Proposer trois modes de définition pour une suite numérique.

① Explicite: $\forall n \quad u_n = \dfrac{\sin n}{n^2+1}$

② par récurrence: $\begin{cases} u_{n+1} = \sin(u_n) & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

③ implicite $\forall n$, u_n est l'unique solution de

l'éq $\tan x = \sqrt{x}$, avec $u_n \in \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$

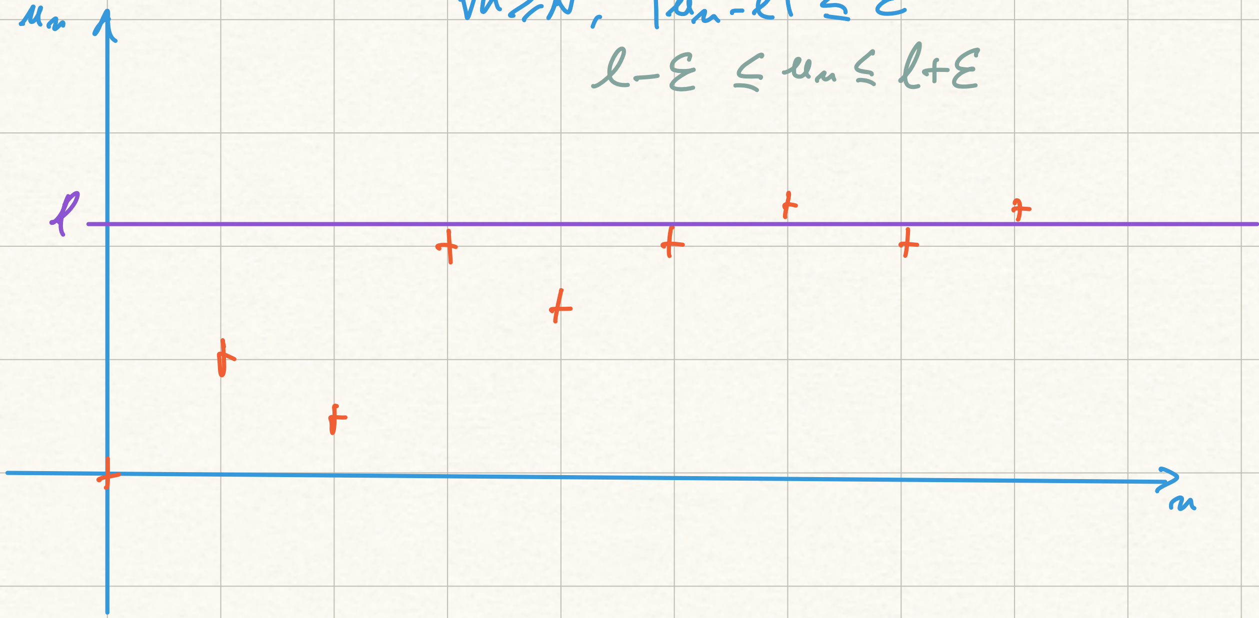
6. Comment définir « $(u_n)_n$ converge » ? Comment ça se comprend ?

7. Et « $(u_n)_n$ ne converge pas » ?

(6) $(u_n)_n$ converge $\iff \exists \ell$ tq $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tq

$\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

$\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$



(7) ne converge pas = diverge

= pas de limite ou limite infinie

= $\forall \ell \ \exists \varepsilon > 0$ tq $\forall N \ \exists n \geq N$ tq $|u_n - \ell| > \varepsilon$

$\exists \ell$ tq $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tq

$\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

8. Y a-t-il un lien entre « converge » et « bornée » ?

oui

Si $(u_n)_n$ converge, alors $(u_n)_n$ est bornée

$(u_n = O(1))$

$\exists M$ tq $\forall n$ $|u_n| \leq M$

Réciproque fausse:

$(\sin n)_n$ $(\sin(2\pi n))_n$ $((-1)^n)_n$

9. Est-ce que $(u_n)_n$ converge, c'est la même chose que $(u_n)_n$ est stationnaire ?

constante à partir d'un certain rang.

Si $(u_n)_n$ stationnaire, alors converge

Réciproque fausse.

Réciproque vraie si $(u_n)_n$ à valeurs entière

10. Est-ce que $(u_n)_n$ converge, c'est la même chose que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$?

$\boxed{\Rightarrow}$ oui

On suppose $u_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell$

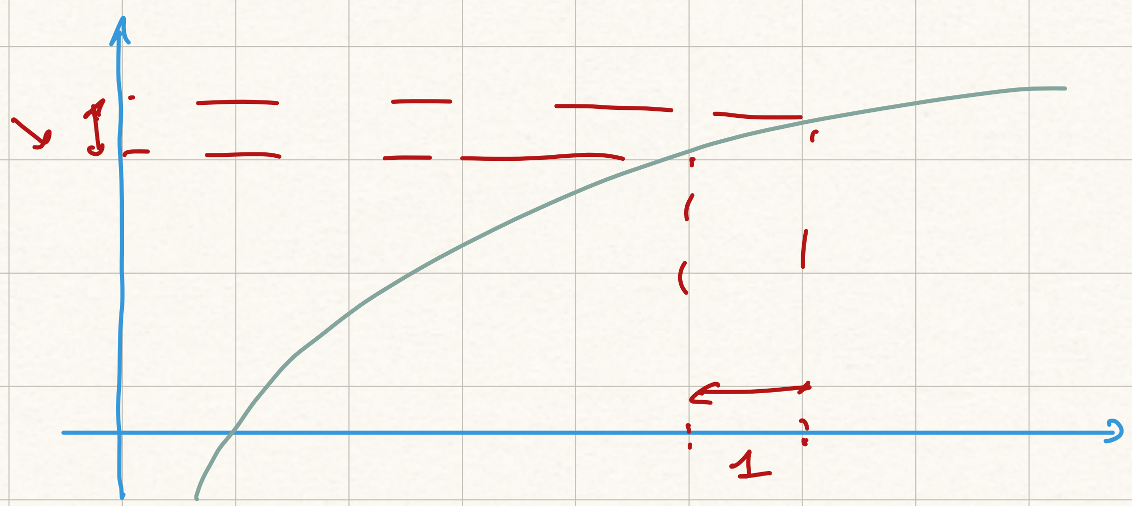
Alors : $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \ell = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ je pense que non.

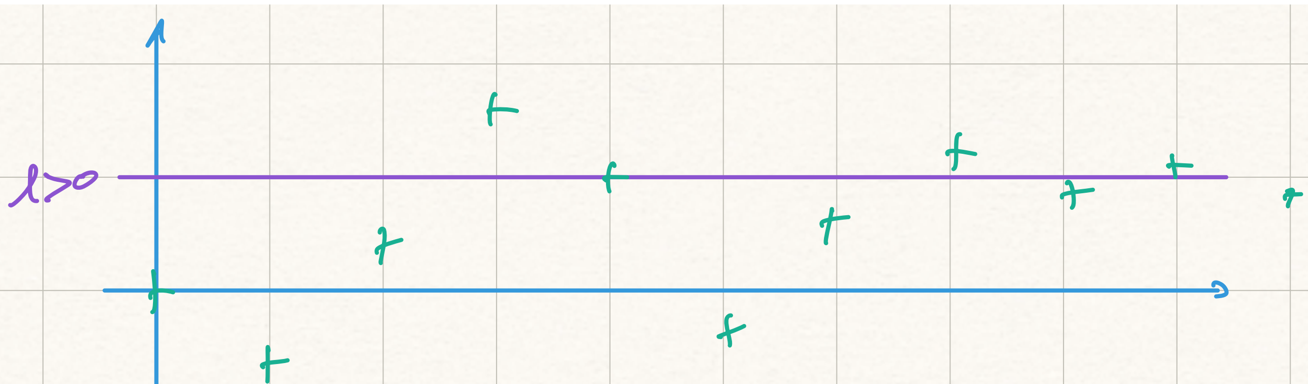
$u_n = \ln(n)$ $\quad (u_n)_n$ diverge $\quad v_n = \sqrt{n}$

$u_{n+1} - u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$



11. Que dire d'une suite $(u_n)_n$ qui converge vers $\ell > 0$?



il existe N tq $\forall n \geq N \quad u_n > 0$

12. On sait qu'il y a des opérations sur les limites de suites convergentes, des formes indéterminées, etc.

13. Qu'est-ce que le résultat « limite par encadrement » ?

Si
- $a_n \leq u_n \leq b_n \quad \forall n$
- $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$
- $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ (la même)

Alors $(u_n)_n$ cv vers ℓ.

À symboliser :

$$\forall n \quad \begin{array}{ccccc} a_n & \leq & u_n & \leq & b_n \\ \downarrow {\scriptstyle +\infty} & & & & \downarrow {\scriptstyle +\infty} \\ \ell & & & & \ell \end{array}$$

donc $u_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell$

Autre version

$$\begin{array}{ccc} |u_n - \ell| & \leq & a_n \\ & & \downarrow {\scriptstyle n \to +\infty} \\ & & 0 \end{array}$$

donc $u_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell$

14. Que signifie « étudier une suite » ?

~~Croissante~~ ?

Converge ?

et si possible sa limite

étudier $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\to$ $\boxed{\text{tableau de variations}}$

15. Citer le « théorème de convergence monotone ».

Si $(u_n)_n \nearrow$ majorée, alors $(u_n)_n$ converge

(on ne connait pas la limite)

Si ! Sa limite est $\sup_n u_n$

Ben non ! on n'a toujours pas la valeur.

16. Donner la définition de « suites adjacentes », et le théorème des suites adjacentes.

Définition: Si $(u_n) \nearrow$

$(v_n) \searrow$

$v_n - u_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$

On dit qu'elles sont adjacentes

Théorème:

Si (u_n) et (v_n) adjacentes,

Alors elles convergent vers la même limite ℓ

et mieux:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{u_n \leq \ell \leq v_n}_{\text{écart} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$

1.3 Suites remarquables

17. On est d'accord pour ne pas rappeler les résultats concernant les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants ?

1.4 Suites récurrentes

Parlons maintenant des suites récurrentes. On considère $(u_n)_n$ définie par la donnée de u_0 et de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

18. Qu'est-ce qu'un intervalle stable par f ? Quel est l'intérêt de les déterminer ?

$u_{n+1} = \sin(u_n)$

I stable par f signifie $f(I) \subset I$

ie $\forall x \in I, \ f(x) \in I$

Ex : Si $[1,2]$ stable par f

et $u_0 \in [1,2]$

Alors $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n \in [1,2]$ par récurrence.

19. Qu'est-ce qu'un point fixe pour f ? Quel est l'intérêt dans le cadres des suites récurrentes ?

x tq $f(x) = x$ s'appelle point fixe

Si $u_n \xrightarrow[+\infty]{} l$, alors $f(l) = l$

en effet : $\forall n \quad u_{n+1} = f(u_n)$

Si $u_n \xrightarrow[+\infty]{} l$

$\downarrow_{+\infty} \quad \downarrow_{+\infty}$

$l \qquad f(l)$ car f continue

20. En quoi l'étude du signe de $f(x) - x$ informe sur le comportement de la suite $(u_n)_n$?

Si $f(x) - x \geq 0 \quad \forall x \in I$

I stable par f

$u_0 \in I$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I$ par réc

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{f(u_n) - u_n}_{= u_{n+1} - u_n} \geq 0$

donc $(u_n)_n \nearrow$

Autre méthode

Si f est croissante

$u_0 \leq u_1$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$ par récurrence

~~$(u_n)_n$ est croissante par récurrence~~

21. Qu'est-ce qu'une fonction lispschitzienne ? contractante ?

f lipschitzienne signifie ~~que f' est~~ bornée

Mais en fait... oui...

$$\exists K \quad \forall x,y \quad \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq K$$

$$|f(x)-f(y)| \leq K\,|x-y|$$

IAF : Si f $\mathcal{C}^1$ (ou plus fin : $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$, dér $]a,b[$)

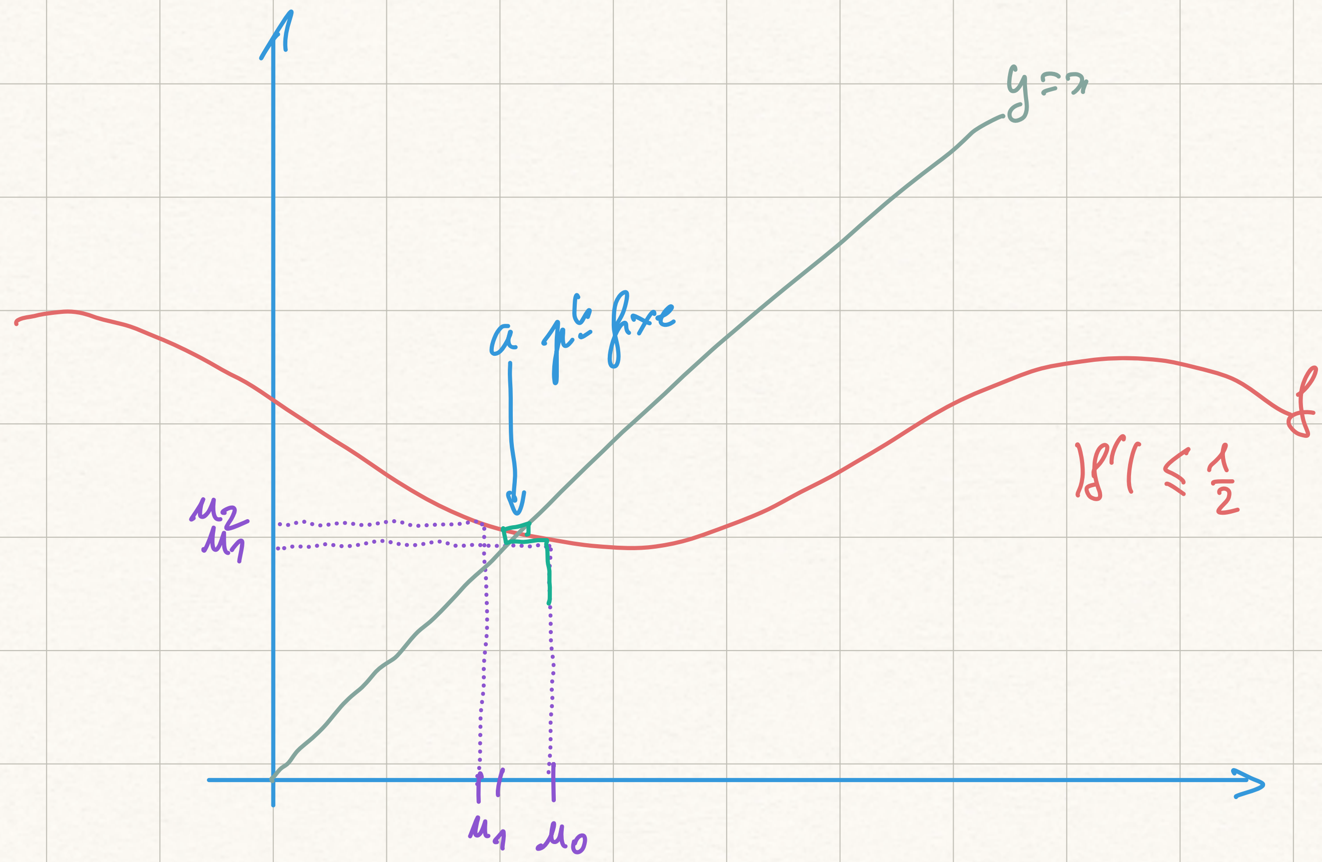
$$\forall t \in I \quad |f'(t)| \leq K$$

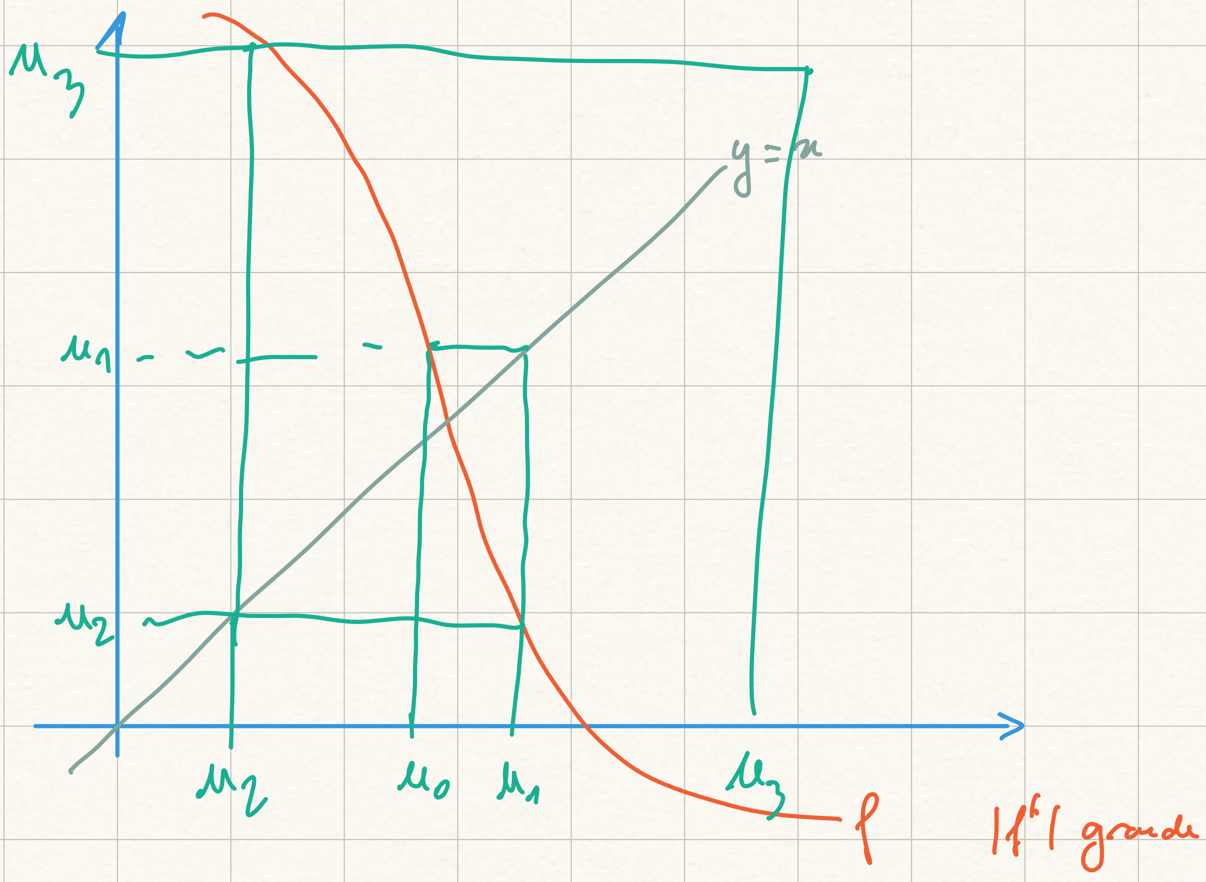
Alors $\forall x,y \in I \quad \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leq K$

22. Si f est contractante et admet un point fixe a, qu'en déduire pour $(u_n)_n$?

K-lipschitzienne avec $K<1$

$$\forall x,y \quad |f(x)-f(y)| \leq K\,|x-y|$$





$$|u_{n+1} - a| = |f(u_n) - f(a)|$$
$$\leq K \; |u_n - a|$$

donc par réc $|u_n - a| \leq K^n |u_0 - a|$

$$K^n |u_0 - a| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{car } K < 1$$

donc $u_n \xrightarrow[+\infty]{} a$

et mieux: $u_n \simeq a$ à $K^n |u_0 - a|$ près

23. Lorsque f est décroissante, que dire des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$?